





BIBLIOTHÈQUE

DE LA REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES

LA MATHÉMATIQUE

PHILOSOPHIE — ENSEIGNEMENT

LA

MATHÉMATIQUE

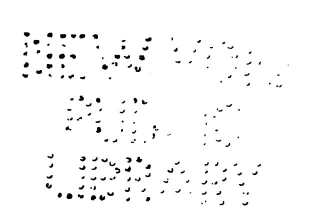
PHILOSOPHIE — ENSEIGNEMENT

PAR

C.-A. LAISANT

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
DOCTEUR ÈS SCIENCES





PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS
3, RUE RACINE, 3

—

1898

LA MATHÉMATIQUE

PHILOSOPHIE. — ENSEIGNEMENT

INTRODUCTION

Caractère de cet ouvrage. — Quelques explications préliminaires, en tête de ce petit livre, me paraissent indispensables. Le titre que j'ai choisi peut paraître en effet très ambitieux ou trop modeste, suivant le point de vue où l'on se place ; je n'en ai cependant pas trouvé d'autre pouvant mieux traduire l'idée qui m'inspirait.

Le lecteur versé dans la culture des hautes sciences mathématiques ne trouvera probablement rien, dans les pages suivantes, qui soit de nature à l'intéresser ; il n'y rencontrera pas, notamment, de ces dissertations profondes, mais parfois nébuleuses, devenues fort à la mode depuis un certain nombre d'années. D'un autre côté, les personnes n'ayant aucune préparation mathématique feront sagement de fermer immédiatement le livre sans aller plus loin ; ce n'est pas un travail de vulgarisation à l'usage des gens du monde, ou destiné à des littérateurs désireux de faire une excursion accidentelle dans une région qu'ils n'ont pas fréquentée jusqu'ici. Je fais librement usage de la langue courante usitée dans le domaine mathématique, sans m'astreindre à définir et approfondir chaque terme, sinon lorsque

cela me semble indispensable pour me faire clairement comprendre ; je m'attache à éviter les formules et les démonstrations géométriques, mais sans y renoncer cependant d'une manière absolue, car mieux vaut à mon avis écrire une ligne de calcul qu'une page d'explications, lorsque cette ligne suffit à rendre la pensée.

Par conséquent, je ne peux rien apprendre ici aux savants — la prétention serait excessive — et je ne saurais être compris des profanes. Il reste une catégorie, plus nombreuse de jour en jour, à laquelle je m'adresse à peu près exclusivement, et pour laquelle cet ouvrage pourra présenter une certaine utilité. C'est celle des hommes qui étudient, qui ont étudié, qui enseignent ou qui appliquent les éléments de la science mathématique, sans se livrer à des travaux personnels purement scientifiques. Ceux-là connaissent le langage courant, ont une notion assez précise des grandes lignes, savent de quoi il est question quand on leur parle mathématique. Mais le nombre des vérités nouvelles est devenu si grand, et dans certaines théories modernes le souci de la recherche a été poussé si loin, soit dans le fond, soit dans la forme, que la situation des hommes dont je parle n'est pas sans offrir quelques périls. Ingénieurs, ils en viennent à se demander si l'usage pratique des notions d'Algèbre ou de Géométrie qu'ils appliquentquotidiennement estbien véritablement légitime ; professeurs, ils s'interrogent pour savoir s'ils ne faussent pas l'esprit de leurs élèves en continuant à leur enseigner ce qui leur fut appris autrefois ; étudiants désireux de pousser plus loin, ils reculent devant l'obstacle, et perdent leur foi scientifique, ébranlée par des raisonnements trop raffinés sur l'incertitude des fondements de nos connaissances.

C'est à ceux dont je parle qu'il est bon de rendre la confiance sans laquelle on ne saurait avancer ; il est utile aussi de leur fournir le moyen de réfuter à l'occasion les sophismes sous lesquels on entreprend assez

fréquemment d'étouffer la science mathématique, et qui tirent habituellement leur origine, soit de l'ignorance, soit d'une connaissance trop superficielle.

La Mathématique. — Je sais qu'aujourd'hui cette appellation n'est plus en grande faveur. Ce n'est pas cependant par un simple caprice personnel que je reprends la forme de langage employée par Condorcet. Je trouve qu'ici le mot réagit fortement sur l'idée ; il me semble plus que jamais utile de l'appliquer dans son énergique concision, parce qu'il exprime mieux que tout autre la grande unité de la science. Aujourd'hui, avec les travaux accomplis au cours de ce siècle, en présence de l'immensité du nombre des découvertes, la plupart des mathématiciens sont contraints de se spécialiser et de consacrer leurs efforts, non pas seulement à une branche de la science, mais à un simple chapitre, s'ils veulent arriver à produire des découvertes dignes d'être remarquées. C'est une nécessité dont il serait profondément injuste de les blâmer ; mais cette conséquence, subie comme un mal inévitable, ne prouve rien contre l'unité fondamentale de *la Mathématique*. Nos divisions et sous-divisions, indispensables pour mettre un peu d'ordre dans la masse inépuisable des propositions, sont en résumé plus artificielles que naturelles. Même dans les plus simples éléments, lorsque nous avons ainsi tracé des limites bien nettes, nous ne tardons pas à nous apercevoir qu'il y a des régions frontières devant lesquelles notre esprit reste embarrassé. Une classification n'est jamais bonne ; comme il est impossible de nous en passer, faisons-la de notre mieux, mais ne perdons pas de vue les vérités premières.

Au fond, il n'y a pas *des sciences mathématiques* : l'Algèbre, la Géométrie, etc... Toutes s'entr'aident, toutes s'appuient mutuellement et sur certains points se confondent. Il y a une vaste science, la Mathématique, que

personne ne peut se flatter de connaître, parce que ses conquêtes sont infinies par nature ; tout le monde en parle, surtout ceux qui l'ignorent le plus profondément. Mais, parmi les hommes qui la cultivent, même avec grande habileté, quelques-uns sont plus attentifs aux succès de détail qu'aux idées générales dont pourtant ces succès sont les conséquences. C'est dire que plus d'un mathématicien ne manquera pas de sourire en lisant ce mot tombé de ma plume, et qui lui paraîtra vieillot et suranné. Je m'y résigne d'avance, et je viens de dire la cause de cette résignation.

Philosophie. — J'ai besoin d'expliquer ce terme, par des raisons toutes contraires de celles dont l'énumération précède. Je n'ai, en effet, aucune compétence spéciale en philosophie, ni aucune prétention à me mêler des questions que j'ignore ou qui m'échappent. Mais je ne connais pas de locution, dans la langue française, qui soit employée plus que ce mot « philosophie » à représenter des idées plus différentes. C'est encore ici des excès de la spécialisation, de cette division du travail poussée à l'extrême, que nous avons à souffrir. Être philosophe, de nos jours, est devenu une profession ; il y faut un long apprentissage, et une habileté dans le maniement des mots, à laquelle tout le monde ne saurait atteindre, même avec beaucoup d'usage et de bonne volonté. C'est un exercice auquel j'aurais depuis longtemps renoncé, s'il m'était jamais venu à l'esprit de l'essayer, d'autant plus que le simple vocabulaire me fait défaut ; condition fâcheuse, on le reconnaîtra, pour parler ou écrire une langue étrangère.

Il est assez habituel, depuis longtemps déjà, d'établir une opposition d'idées entre l'esprit du mathématicien et celui du philosophe, le premier considérant le second comme un rhéteur qui fabrique des paradoxes, et le philosophe contemplant avec une pitié hautaine un malheureux qui se croit contraint, pour pouvoir raison-

ner, à tracer des figures ou à griffonner des formules.

Jadis, il en allait autrement. J'ai cru pendant longtemps que Leibniz, Descartes, Pascal ; que d'Alembert, Diderot, Condorcet, au XVIIIe siècle ; qu'Auguste Comte, parmi nos contemporains, avaient été des philosophes. Quelques-uns de ceux-là, cependant, ont laissé une trace assez brillante derrière eux, au point de vue mathématique ; et je doute qu'il y en ait eu un seul, parmi les noms que je viens de citer, pour regarder la Mathématique comme une science inférieure.

Ces philosophes-là, pourtant, écrivaient clairement, autant qu'il leur était possible ; ils n'employaient pas de termes compliqués pour exprimer des choses simples ; ils semblaient avoir plus à cœur de faire pénétrer leur pensée dans le cerveau d'autrui, que de se créer une réputation d'habiles gens. Je les ai lus avec plaisir ; j'ai même éprouvé cette illusion, si c'en est une, qu'en les lisant j'apprenais quelque chose. De là m'est venue cette double conviction : qu'il n'est pas nécessaire d'ignorer la Mathématique pour bien raisonner sur les idées générales, ni de mépriser les idées générales pour être un mathématicien.

Il m'a semblé en outre que le terme de philosophie pouvait servir à désigner des choses qui ne se ressemblent guère, ainsi que je l'indiquais plus haut ; qu'il n'était pas interdit d'en faire usage dans un sens très restreint et très modeste ; et que peut-être beaucoup d'entre nous faisaient (comme M. Jourdain de la prose) de la philosophie sans le savoir, lorsqu'il nous arrivait de méditer, ou de communiquer à ceux qui nous entourent le résultat de nos méditations.

Donc, il ne faut pas s'y tromper, j'y insiste. Le but que je poursuis est d'apporter ici des réflexions simples, de les exprimer le plus clairement possible, de me servir du bon sens et du raisonnement ordinaire, en dehors de toute préoccupation d'école, pour dire ce que je pense sur des sujets qui m'ont intéressé toute ma vie.

Si mon ambition avait été plus haute, et si j'avais voulu faire œuvre savante, je me serais souvenu de cette parole de Leibniz :

« Sans les mathématiques, on ne pénètre point au fond de la philosophie ; sans la philosophie, on ne pénètre point au fond des mathématiques ; sans les deux, on ne pénètre au fond de rien ».

A cette occasion, et pour rendre justice à qui le mérite, je dois reconnaître que depuis ces derniers temps surtout, il y a eu dans l'ordre d'idées que j'indique des tentatives intéressantes, et qui méritent la plus large approbation. Les facultés des lettres sont loin de dédaigner les travaux philosophiques empruntant une bonne part des idées au domaine mathématique ; il y en a eu très récemment encore à Paris même un brillant exemple. Si ces innovations n'ont pas encore donné tout ce qu'on est en droit d'en attendre, si cette réaction salutaire, qui doit finir par ramener un peu d'unité dans la culture de l'intelligence humaine, n'est pas encore un fait accompli, la faute en est peut-être moins aux philosophes qu'aux mathématiciens modernes. A force de poursuivre une prétendue rigueur, de recherche en recherche, d'objection en objection, ils en sont venus fréquemment à jeter le doute dans leur propre esprit et dans celui des autres, à obscurcir ce qui était clair, compliquer ce qui était simple ; et le résultat, en fin de compte, a été parfois une régression, plutôt qu'un progrès. C'est un sujet sur lequel j'aurai trop souvent occasion de revenir dans la suite pour qu'il soit nécessaire quant à présent de m'y appesantir.

Enseignement. — La science mathématique, à ses échelons divers, est enseignée de nos jours dans tout le monde civilisé. Je ne suis bien au courant de la question qu'en ce qui touche la France ; mais, d'après le peu que je sais de ce qui se passe au delà des frontières, les différences dans le plan général et dans les méthodes

ne sont pas très profondes; c'est surtout sur les détails qu'elles portent. C'est donc de l'enseignement en France que je m'occuperai surtout, n'ayant guère le goût de discourir sur les choses que j'ignore. La question est capitale, car les premières notions que nous recevons sur chaque objet sont celles qui restent le plus profondément empreintes dans notre esprit. D'autre part, le problème de l'enseignement mathématique se pose dans des conditions toutes nouvelles, au milieu de notre civilisation actuelle et du développement industriel extraordinaire, sans précédent, qui s'est accompli au cours du XIXe siècle et ne s'arrêtera pas au XXe.

Les nécessités du véritable enseignement mathématique moderne ont-elles été comprises et s'en inspire-t-on franchement? Je ne le crois pas. Mais j'estime en même temps que nous avons en France les plus admirables éléments à notre disposition pour accomplir cette réforme, avec les qualités de travail, de bonne volonté, de dévouement, que notre corps enseignant possède à tous les degrés, depuis le plus modeste instituteur de village jusqu'aux membres de l'Institut professant à la Sorbonne ou dans nos grandes écoles.

Le jour où l'on jettera quelque bonne semence dans ce champ si bien préparé, la moisson ne tardera pas à fleurir. Il suffira de quelques indications générales, d'un appel un peu sincère aux initiatives, pour voir s'accomplir de véritables miracles. Cela ne se fera pas demain. Mais la question ne m'inquiète pas outre mesure, parce que la nécessité des choses contraindra à sortir de la routine dont nous ne sommes pas encore dégagés, et à retourner une formule qui peut sans exagération se résumer ainsi : tout attendre de la mémoire et presque rien de l'intelligence.

Je m'empresse pourtant d'ajouter dès maintenant que ce reproche ne s'applique pas à l'enseignement

fourni les formules ou les raisonnements infaillibles; c'est la Mathématique appliquée qui complète l'œuvre en montrant la fatalité, la nécessité des erreurs. Pour n'avoir pas suffisamment mis en lumière cette opposition, on a laissé s'accréditer les plus odieux et les plus grossiers sophismes.

La vérité, c'est que sans la Mathématique pure, l'application serait impossible; et sans l'intervention de la Mathématique appliquée, la Mathématique pure ne peut donner de résultats exacts que dans le monde des abstractions. Est-ce que, dans tout cela, il y a rien qui puisse prouver quelque chose contre la science mathématique elle-même ? Ce qu'il en faut seulement retenir, c'est l'utilité, dès le début, dès l'enfance, d'établir nettement la distinction, et d'habituer l'esprit à raisonner juste, et à ne pas se payer de chimères, formules ou mots, quand on se trouve aux prises avec la réalité des choses.

Dans cet ordre d'idées, je ne puis non plus passer sous silence l'éternelle dispute, si souvent soulevée, et qui dure encore, entre les lettres et les sciences, et particulièrement entre les lettres et la Mathématique. Les unes valent-elles mieux que l'autre ? A qui donner la supériorité ?

Autant vaudrait se demander s'il est préférable pour un homme de manger ou de dormir. Supprimez l'alimentation, ou supprimez le sommeil, et le résultat inévitable sera le même. Abolissez la culture littéraire, l'étude des étapes de l'humanité, ou bien renoncez à préparer l'homme à ce combat continuel qu'il doit livrer à la nature pour en pénétrer les secrets; et dans les deux cas vous aurez des générations pourvues de cerveaux incomplets.

Partagez votre élite intellectuelle en deux classes, à peu près comme on le fait aujourd'hui : l'une de lettrés, l'autre de savants; et vous créez deux castes de « demi-nmes » incapables de se comprendre et de compren-

dre le monde dans lequel ils vivent. Ici, nous y revenons encore, c'est un enseignement réformé qui seul pourra remettre de l'ordre dans ce chaos.

Observation finale. — J'en aurai terminé avec cette trop longue Introduction, lorsque j'aurai eu le soin, comme c'est mon devoir, de prévenir le lecteur de deux choses. La première, c'est qu'il ne rencontrera ici aucune trace d'érudition; la seconde, c'est que les idées que je développe en toute liberté n'engagent et ne sauraient engager que moi.

Il a été tellement écrit sur le sujet que je traite, depuis la tentative si remarquable d'Auguste Comte dans sa Philosophie positive, que l'on pourrait, avec quelques recherches patientes, et sans rien dire que d'utile, produire plusieurs gros volumes. Le temps me ferait défaut pour un tel labeur; et, de plus, ce serait en contradiction avec le but que je poursuis et que j'ai essayé d'indiquer ci-dessus.

Si quelques citations viennent au hasard sous ma plume, ce ne sera donc qu'accidentellement. Pour éviter l'écueil que je signale, je me suis même attaché à éviter de relire ce que j'ai lu jadis; la tentation de commenter ou de discuter pouvait être assez vive. Un petit ouvrage comme celui-ci, je l'ai cru du moins, gagnera à être présenté avec le moins d'appareil et de solennité; composé sur des réflexions et grâce à quelques souvenirs, il doit être considéré comme une sorte de causerie sans prétention, plutôt que comme un livre grave.

En un temps où l'on voit tant de doctes dissertations sur des sujets légers ou futiles, pourquoi ne serait-il pas permis de laisser un peu courir sa plume sur un sujet sérieux, ne fût-ce que pour rétablir l'équilibre ?

Beaucoup me blâmeront [illegible] des cou-
rants d'opinions qui paraî[illegible]

uns me discuteront, ce que je désire ; un petit nombre de lecteurs réfléchiront après avoir lu ; et c'est le seul but que je poursuive. Mais tous reconnaîtront, je l'espère, que sans orgueil immodéré, sans vouloir non plus établir un rapprochement qui serait envers le grand Montaigne une sorte d'ironie injurieuse, j'ai le droit de dire, comme lui, que « ceci est un livre de bonne foi ».

LA MATHÉMATIQUE PURE

PHILOSOPHIE

CHAPITRE PREMIER

La Mathématique et ses subdivisions.

Essais de définitions. — C'est le propre des idées très générales de se prêter difficilement à une définition, par l'excellente raison que, pour définir, il faut employer des mots, et que la signification exacte des mots employés n'apparait, claire et précise, qu'après l'étude même de l'objet à définir. Cependant, l'esprit humain a une tendance générale à vouloir expliquer les choses *a priori*; c'est une sorte de besoin logique. Aussi n'est-il pas étonnant que d'innombrables définitions de la science mathématique aient été proposées, quelques-unes par les génies les plus éminents, et que cependant aucune de ces définitions ne puisse résister à la critique :

« La Mathématique est la science des grandeurs ».
« Elle a pour objet la mesure des grandeurs ».
« Elle étudie l'ordre et la mesure ».
« Elle se propose l'étude du nombre et de la forme ».

Nous nous bornons à ce petit nombre d[illegible] ils suffisent à montrer que l'obstacle est [illegible] sable, tenant à la nature même des choses [illegible] définitions sont bonnes pour qui possède [illegible]

certaines notions mathématiques générales. Aucune n'apprendra rien à celui qui ignore totalement ces notions, parce que les mots grandeur, mesure, ordre, par exemple, n'auront pas pour lui un sens exact et précis.

En essayant de pousser plus loin, et de greffer définitions sur définitions, on parvient à des résultats bien pires. C'est ainsi que, voulant faire comprendre ce que c'est qu'une grandeur ou une quantité, on en est arrivé à rendre pour ainsi dire classique, dans l'enseignement le plus élémentaire, cette formule vaine et pernicieuse : « On appelle grandeur ou quantité tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution ». Comme si la distance entre deux points fixes n'était pas une grandeur! Comme si l'estime et l'amitié que l'on a pour une personne, l'enthousiasme, l'admiration, la haine, toutes les manifestations morales, qui sont assurément susceptibles d'augmentation ou de diminution, pouvaient être raisonnablement classées au nombre des grandeurs mathématiques!

Il faut donc se résigner à l'avance à ne posséder aucune définition parfaite de la Mathématique. Mais, à défaut de la définition rigoureuse, on peut et l'on doit chercher, dans toutes les tentatives auxquelles on s'est livré dans cet ordre d'idées, un moyen de pouvoir faire comprendre, au moins d'une manière approximative, l'esprit général et le but essentiel de la Mathématique.

Origine expérimentale. — Au risque de surprendre et peut-être d'indigner certains philosophes, je me permets d'énoncer tout d'abord cet axiome :

Toutes les sciences sont expérimentales.

C'est, en somme, la reproduction de la formule célèbre : « Rien ne pénètre dans notre esprit qu'après avoir d'abord passé sous le témoignage de nos sens ». La Mathématique, pas plus qu'aucune autre science,

n'échappe à la loi commune. J'estime que sans la présence du monde extérieur aucune connaissance mathématique n'aurait jamais pu pénétrer dans le cerveau de l'homme; et que, seul dans l'univers et réduit à l'état de pure intelligence, le plus incomparable génie n'arriverait jamais à la notion du nombre 2, ce génie fût-il celui d'un Archimède, d'un Gauss et d'un Lagrange.

Ce qui distingue la Mathématique des autres sciences, c'est qu'elle emprunte à l'expérience, au monde extérieur, un minimum de notions. Et, une fois cette première base établie, par la seule puissance de la logique, elle édifie sur ces fondations un monument d'une incomparable splendeur, et dont le couronnement ne sera jamais atteint.

Mesure et nombre. — En somme, nous vivons. Nous avons autour de nous des objets; l'idée de comparer ces objets les uns avec les autres, de considérer les groupes qu'ils nous présentent, est naturelle à l'homme, et s'est assurément offerte à lui dès les premiers âges. Une observation attentive nous révèle qu'il n'existe pas d'objets exactement pareils; mais, par une opération de l'esprit qui ne demande aucun effort, bien qu'elle renferme à elle seule tout le secret de l'abstraction mathématique, nous assimilons entre eux les objets qui nous paraissent se ressembler, et nous renonçons momentanément à l'examen des différences qui les distinguent les uns des autres. De là vient l'origine du calcul; l'action de *compter* semble en général toute simple à ceux-là mêmes qui sont le moins mathématiciens; et cependant, si nous comptons des arbres dans un parc, nous savons fort bien que les arbres peuvent être d'essences différentes, qu'ils n'ont ni la même taille, ni le même âge, ni le même nombre de branches et de feuilles. Une pincée de grains de blé est jetée sur une table; nous disons : voilà 25 grains de blé; et, si nous nous mettons à les examiner avec une

des évaluations de mesures qu'un examen superficiel nous ferait proclamer impossibles, et qui seraient vraiment impossibles par voie directe.

Cependant, pas plus que les autres, cette définition n'est parfaite ni complète. Elle ne comprend pas, en premier lieu, la notion d'*ordre*, qui est inhérente à l'esprit mathématique au même degré que la mesure. Et puis, à la prendre dans son sens absolu, elle laisserait de côté toutes les propriétés géométriques qui n'intéressent pas les questions de mesure. Nous ne pouvons nous appesantir ici sur ces considérations, qui trouveront naturellement leur place lorsque nous aurons, plus loin, à présenter un aperçu des diverses branches de la Mathématique. En les signalant, notre but est seulement de prémunir l'esprit du lecteur contre les formules générales, si séduisantes qu'elles nous apparaissent. Par cela même qu'elles sont trop générales, on y trouve une certaine confusion qui n'est pas sans danger.

Le but de la Mathématique. — A la place d'une définition reconnue réellement impossible, essayons donc, en partant des considérations déjà établies, de nous rendre compte, du moins d'une façon approchée, de l'objet que poursuit la science mathématique et de l'intérêt qu'elle présente pour l'humanité.

Compter et mesurer, avons-nous dit, sont des notions familières. Tout ce qui se compte et se mesure, tout ce qui s'évalue, appartient au domaine des grandeurs, qu'étudie la science mathématique, et l'évaluation engendre des nombres, symboles des mesures. Mais, nous ne saurions trop y insister, rien ne peut être soumis à l'application mathématique sans l'opération préalable de l'esprit que nous avons qualifiée d'abs-raction, et qui consiste essentiellement à supprimer ar la pensée, dans la chose étudiée, les caractères articuliers qu'elle présente, et qui empêcheraient, si

l'on en tenait compte, de la comparer avec d'autres choses analogues. Cette opération de l'abstraction, nous la retrouverons partout, sous mille apparences diverses, mais offrant toujours, en définitive, le même caractère fondamental.

L'abstraction peut être partielle ou totale; ou, pour parler plus exactement, on peut la pousser plus ou moins loin ; mais sans son secours, aucune étude mathématique n'est possible, aucun objet ne tombe dans le domaine des grandeurs, aucun des phénomènes de la nature ne peut être abordé. Cela provient de ce que le plus simple de ces phénomènes, de ce que le plus élémentaire de ces objets, présente une complexité telle que l'esprit humain, s'en étant rendu compte, demeure impuissant et effrayé. Envisager toutes les conditions, essayer de pénétrer jusqu'à l'absolu est une pure chimère. Par l'abstraction, nous faisons disparaître ces complications; à la réalité des choses nous substituons des êtres de raison, créés par notre cerveau, sur lesquels les raisonnements et les procédés mathématiques pourront librement s'exercer.

Il suit de là que les applications mathématiques, en dépit d'une opinion erronée trop généralement répandue, ne peuvent jamais prétendre à l'absolue rigueur; elles consistent en approximations plus ou moins parfaites, suivant le degré d'avancement de la science; mais, si l'on avance sans cesse vers la vérité, jamais on ne peut se flatter de l'avoir définitivement atteinte.

Le véritable esprit mathématique conduit donc, à l'encontre d'un préjugé maintenu par l'ignorance, à une méfiance perpétuelle de l'absolu. Très à l'aise, au milieu des plus profondes et difficiles recherches, tant qu'il raisonne sur les abstractions pures, le mathématicien sait à merveille que ces abstractions ne répondent pas et ne peuvent répondre aux faits ; et c'est avec des précautions infinies qu'il entreprendra de transporter

dans la réalité des choses les résultats de ses raisonnements ou de ses calculs.

En somme, le but essentiel vers lequel tend la science humaine, c'est l'étude des phénomènes que nous présente le monde extérieur. Il y a dans cette étude trois périodes bien distinctes, en nous plaçant bien entendu au point de vue purement mathématique. Tout d'abord, par une abstraction préalable convenablement graduée, et souvent fort difficile, il faut préparer les grandeurs que l'on doit étudier de manière à les rendre accessibles aux méthodes mathématiques, en profitant des ressources que la science nous offre à cet égard ; cette première partie est ce que l'on appelle souvent la *mise en équation* ; elle réalise le *passage du concret à l'abstrait*, et substitue ainsi au phénomène trop complexe pour être approfondi un problème plus simple, parce qu'il ne porte que sur des abstractions, et qui représente une traduction approchée, mais approchée seulement, de la nature des faits.

Une fois ce travail préparatoire accompli, la *résolution des équations*, effectuée par le seul secours des méthodes et des procédés mathématiques, permettra d'opérer des transformations utiles, de faire ressortir avec clarté les moyens d'évaluation des quantités que l'on cherche, et dont les valeurs étaient parfois entourées primitivement d'une obscurité profonde. Cette deuxième période est d'ordre exclusivement abstrait, puisque l'on n'y considère que des abstractions. Les nombres, les formules, les symboles de toute espèce ne représentent ici plus rien, en dehors des êtres logiques créés par le cerveau de l'homme. C'est sans doute ce qui a fait reprocher souvent à la Mathématique de fausser l'esprit en le poussant dans la voie de l'absolu. Mais le grief est d'autant plus mal fondé, qu'il s'applique à une seule opération, sur trois dont se compose l'étude mathématique complète. Il faut d'ailleurs remarquer que ce travail de déductions opérées

sur des abstractions n'a par lui-même aucune vertu créatrice spéciale. Le calcul transforme, mais il ne rend jamais que ce qui lui a été confié ; c'est un fait inhérent à sa nature, et il n'en est pas moins précieux pour cela, car il permet de mettre en évidence des relations et des propriétés qui, sans son aide, seraient restées enveloppées d'une sorte de mystère. Mais ce serait une erreur profonde que de vouloir lui attribuer des vertus qu'il ne peut posséder à aucun titre.

Il nous reste à expliquer rapidement le caractère de la troisième période de l'étude mathématique d'un phénomène. Elle consiste dans le *retour de l'abstrait au concret*.

Il s'agit de transporter les résultats fournis par le calcul et les raisonnements abstraits dans le domaine objectif qui avait fourni les données de la question, de discerner quels sont ceux de ces résultats fournissant des solutions utiles, d'interpréter ces solutions, d'en *faire la discussion*, comme l'on dit dans le langage mathématique ; et ce n'est pas toujours la partie la moins délicate ni la moins épineuse de la question. Ajoutons pour mémoire qu'il sera toujours prudent de recourir, pour un contrôle définitif, à la sanction de l'expérience ; cette dernière opération n'appartient plus à proprement parler à la science mathématique ; elle relève au contraire de la science spéciale à laquelle se rattache le phénomène étudié ; mais il est indispensable, pour dissiper toute équivoque, d'expliquer pourquoi ce contrôle est nécessaire.

Nous avons vu que les éléments introduits dans le calcul ou dans le raisonnement mathématique sont des abstractions qui ne sont pas la représentation exacte des faits réels, mais doivent seulement s'en rapprocher. Les nécessités de cette abstraction préliminaire entraînent donc des erreurs inévitables, nous en sommes prévenus d'avance. Suivant la nature des questions, cette première opération peut souvent devenir fort

incertaine; l'hypothèse y joue parfois un rôle capital, à défaut de données plus solides; or, si l'hypothèse est en elle-même une ressource précieuse pour nous aider dans nos investigations, elle offre par contre de gros périls, surtout si elle a été créée *a priori*, et si nous cédons à la tentation trop naturelle d'accorder les qualités de la réalité effective à ce qui n'est que le fruit de notre imagination. D'autre part, sans qu'il y ait même intervention d'hypothèse proprement dite, il peut fort bien arriver (et il arrive plus souvent qu'on ne le suppose) qu'on ait négligé, pour construire les abstractions premières, des éléments qui nous semblent sans importance, par suite d'une appréciation insuffisante des faits. La mise en équation étant faite dans ces conditions, et le calcul ayant été conduit d'une façon irréprochable, les résultats mathématiques obtenus seront les solutions d'une question différente de celle qui nous était présentée. Au lieu de l'approximation à laquelle nous étions en droit de pouvoir prétendre, nous nous trouverons en présence d'un écart constituant une erreur grossière. C'est l'expérience seule qui pourra nous faire connaître, en général, s'il en est ainsi, ou bien, tout au contraire, si nous devons accorder créance à notre solution, et la considérer comme pleinement satisfaisante dans des limites d'erreurs assignées et connues.

Subdivisions de la Mathématique. — Nous avons dès à présent une idée générale du domaine sur lequel s'étend la science mathématique, et nous comprenons qu'il y aura lieu, pour pénétrer plus profondément au cœur du sujet, de la diviser tout d'abord en deux grandes branches, l'une comprenant l'*abstrait*, l'autre le *concret*, et répondant à peu près à ce que l'on appelle la *Mathématique pure* et la *Mathématique appliquée*.

Même dans l'étude de la Mathématique pure, il sera nécessaire néanmoins d'emprunter quelque chose au monde extérieur, pour nous rendre un compte exact de

la genèse des abstractions ; mais cela ne saurait porter atteinte à la grande classification d'ensemble dont nous venons de parler.

Ceci posé, si nous cherchons, dans les objets que nous présente la nature, à reconnaître ceux qui sont évaluables, et par suite accessibles à la méthode mathématique, nous voyons d'abord les *collections* d'objets isolés, par abstraction supposés identiques, et qui donnent naissance à la notion des *nombres entiers*. Cette étude, par suite des nécessités concrètes qui s'imposent, nous conduit de proche en proche à une généralisation qui embrasse toutes les opérations sur les nombres et l'étude des propriétés qu'ils nous offrent. C'est le calcul numérique ou l'*Arithmétique*, dans son sens le plus étendu, c'est-à-dire comprenant l'*Arithmologie*, qui se présente à nous. Mais la généralisation ne se borne pas là : la recherche des lois suivant lesquelles s'opère le calcul a amené progressivement l'esprit de l'homme à créer des symboles pour représenter les opérations ; et de l'association de ces symboles, de leur combinaison systématique suivant des règles logiques immuables, est sortie l'*Algèbre*, sorte de langue universelle des opérations sur les grandeurs.

De l'idée fondamentale de l'Algèbre résulte, comme nous le verrons bientôt, la notion de *fonction*. Puis, la notion de fonction, associée à la connaissance naturelle de la *continuité*, que nous révèle le monde extérieur, nous amène au *Calcul infinitésimal*, instrument merveilleux de recherche et d'investigation, dont nous sommes redevables au génie de Leibniz et de Newton, peut-être aussi de Fermat. Enfin, au cours du XIXe siècle, et particulièrement dans ces dernières années, des travaux tellement considérables ont été accomplis dans l'étude des fonctions et de leurs propriétés, qu'il faut créer à la *Théorie des fonctions* une place à part, distincte du Calcul infinitésimal proprement dit.

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que des grandeurs évaluables et mesurables, et que nous supposons représentées par des nombres. Mais les corps que nous voyons ont des formes, ils occupent des positions dans l'espace. L'étude des positions et des formes dans l'espace nous ouvre l'horizon immense de la *Géométrie*. Cette étude prend un caractère particulier de précision et de généralité par l'application systématique du calcul, application qui constitue la *Géométrie analytique*. Nous voyons ainsi successivement apparaître les diverses branches de la science mathématique, s'appliquant à un monde extérieur immuable et en repos. Or, l'observation nous montre que le mouvement est le caractère commun de tous les corps, que leurs positions et leurs formes sont variables avec le temps, grandeur indéfinissable, mais que nous savons mesurer. La *Mécanique* embrassera l'étude du mouvement accompli dans le temps et dans l'espace.

L'énumération qui précède est loin d'être complète ; encore moins faudrait-il la croire absolue ; en réalité, toutes les sciences se ramifient, s'entr'aident ; s'il est nécessaire de grouper les connaissances humaines en grandes catégories, pour mettre un peu d'ordre et de méthode dans ce qui serait autrement un chaos, il y aurait imprudence à méconnaître qu'aux limites de chacune d'elles il existe, non pas une ligne de démarcation nettement et rigoureusement tracée, mais au contraire une sorte de zone frontière sur laquelle plusieurs sciences diverses peuvent revendiquer des droits égaux. C'est ce que la suite de cette étude ne cessera de nous révéler à chaque instant, et cela nous dispense d'appuyer ici notre affirmation de faciles exemples.

On remarquera que notre énumération est restée muette en ce qui concerne la Physique mathématique. C'est qu'en réalité, si le domaine d'application de la Mathématique s'est largement accru de ce côté, ces conquêtes, dont il y a lieu d'ailleurs de se féliciter,

ont été obtenues à l'aide d'abstractions et d'hypothèses nouvelles, qui ont permis de donner un caractère mathématique aux théories édifiées dans ce but ; c'est donc un élargissement progressif du champ d'investigation sur lequel s'étend l'action de la Mécanique, et qui ne nous contraint pas à la nécessité d'une subdivision particulière. D'ailleurs, voulant ne pas excéder les limites d'une étude rapide, nous ne chercherons pas à revenir sur cet ordre d'idées, et nous laisserons la Physique mathématique en dehors des considérations que nous nous proposons de développer à grands traits. Il est seulement utile d'insister ici sur la nécessité particulière de contrôler par l'expérience, plus attentivement que jamais, les précieux résultats que fournit la science mathématique, sous peine de commettre de graves erreurs ; autrement, on risquerait de laisser à la charge de la Mathématique des méfaits dont réellement elle ne saurait être rendue responsable.

Essai d'une classification. — Reprenant la liste des grandes subdivisions ci-dessus énumérées, nous pouvons à présent présenter le plan général de notre étude, qui comprendra :

La *Mathématique pure*, se subdivisant ainsi :

Arithmétique et Arithmologie. *Algèbre.* *Calcul infinitésimal.* *Théorie des fonctions.*	*Science du calcul.*
Géométrie. *Géométrie analytique.*	*Science de l'étendue.*
Mécanique rationnelle.	— *Science du mouvement.*

La *Mathématique appliquée*, comprenant :

Des *considérations générales préliminaires ;*

L'*application du Calcul ;*

L'*application de la Géométrie ;*

L'*application de la Mécanique.*

Dans une troisième partie, nous envisagerons les questions relatives à l'enseignement des diverses branches de la Mathématique, en suivant à peu près le même ordre.

J'ai dit qu'une semblable classification, forcément artificielle, devait présenter des imperfections et des lacunes. On n'y voit pas apparaître, en effet, des chapitres importants, tels que l'Analyse combinatoire, le Calcul des probabilités, la Géométrie de situation, pour nous borner à un petit nombre d'exemples. C'est que, d'une part, une classification trop étendue perdrait en clarté ce qu'elle pourrait gagner en rigueur, sans pour cela devenir absolument rigoureuse ; et que, d'un autre côté, il ne nous semble pas y avoir un grave inconvénient à nous conformer à des habitudes prises, en faisant rentrer les sujets dont nous parlons dans un domaine qui n'est peut-être pas le leur au point de vue strict de la nature des choses, mais qui s'en rapproche assez, en raison des procédés et des méthodes à mettre en œuvre.

Importance de la science mathématique. — Si nous avons été assez heureux jusqu'ici pour exprimer clairement notre pensée, le lecteur doit entrevoir dès maintenant la haute importance de la Mathématique dans l'échelle des connaissances humaines. Sans son secours, aucune étude des faits où figurent des quantités n'est rationnelle ni complète ; c'est le plus merveilleux instrument créé par le génie de l'homme pour aider à la découverte de la vérité. Pourvu qu'on en fasse un emploi judicieux, pourvu qu'on ne lui demande pas d'autres services que ceux dont elle est capable, la Mathématique vient apporter son concours à toutes les autres sciences. Ajoutons qu'en elle-même, et au point de vue du développement de l'esprit, l'étude mathématique est un admirable exercice de gymnastique logique ; on y apprend à raisonner juste, à effectuer les rapprochements nécessaires entre les idées et les signes, à

faire le départ entre l'absolu et le relatif, entre le concret et l'abstrait.

Peut-être est-il bon de produire une pareille affirmation, même au milieu du grand développement scientifique et industriel de notre époque. Les préjugés, en effet, ont une ténacité telle, qu'ils persistent longtemps encore après que les faits leur ont donné les plus cruels démentis ; et c'est seulement par une persistance incessante dans l'affirmation de la vérité qu'on finit par les déraciner. Cependant, une affirmation isolée en faveur de la science mathématique n'a guère de valeur, émanant d'un homme qui fait profession d'aimer cette science. C'est pourquoi je préfère invoquer des autorités comme celle de Leibniz, disant que la Mathématique est « l'honneur de l'esprit humain » ; de Pascal écrivant : « entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la Géométrie l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle ».

Mais Leibniz, mais Pascal, peut-on dire, sont à la fois de grands philosophes et des mathématiciens illustres. A ce dernier titre, leur témoignage peut être entaché de partialité. Rappelons donc aussi cette parole, attribuée à Napoléon Ier : « L'avancement, le perfectionnement des mathématiques sont liés à la prospérité de l'État ».

Mentionnons cet aveu de Darwin : « J'ai profondément regretté de n'avoir pas suffisamment approfondi ce genre d'études (l'Algèbre), au moins de façon à comprendre les grands principes de mathématiques, car les hommes doués de cette compréhension semblent posséder un sens supplémentaire ».

Enfin, tout en faisant la part de ce qu'elle peut présenter peut-être de trop absolu dans sa concision, méditons la pensée que Kant a exprimée en ces termes : « Une science naturelle n'est une science qu'autant qu'elle est mathématique ».

CHAPITRE II

L'Arithmétique et l'Arithmologie.

Caractère général de l'Arithmétique. — Il est assez difficile de délimiter d'une façon précise le domaine de l'Arithmétique, et surtout d'indiquer exactement quels sont les caractères essentiels qui la distinguent de l'Algèbre, dont nous aurons à nous occuper dans le chapitre suivant. Auguste Comte, à notre avis, a donné la meilleure formule, en disant que l'Arithmétique a pour objet le *calcul des valeurs* et l'Algèbre le *calcul des fonctions*. C'est une forme de langage exigeant, pour être bien comprise, une certaine connaissance de la notion de fonction, et qui a par suite l'inconvénient de ne pouvoir être placée au frontispice de la science. L'inconvénient est mince, du reste ; car, s'il peut être agréable, pour la satisfaction complète de l'esprit, de posséder ainsi une définition globale et synthétique, nous cherchons en vain quelle en peut être l'utilité, soit au point de vue de l'enseignement, soit à celui d'une compréhension générale des choses, pour celui qui cherche à acquérir une simple initiation préalable.

Tout en rendant pleine justice, ainsi que nous venons de le faire, à la définition générale d'Auguste Comte, nous pouvons donc aussi nous rendre un compte exact de ce qu'est l'Arithmétique, en énonçant qu'elle consiste dans la science du calcul, ou bien qu'elle étudie les

nombres et les opérations sur les nombres. Ajoutons qu'on est communément convenu d'appliquer ce terme d'Arithmétique à la partie la plus élémentaire de la science générale du calcul, et que c'est habituellement par là qu'on aborde l'étude de la Mathématique.

Ce seul fait suffirait à lui donner une importance capitale, car, selon que les notions premières qui se présentent au début d'une vaste étude sont claires ou confuses, bien ou mal présentées, il s'ensuit une réaction nécessaire sur toute la série des connaissances à acquérir plus tard. Cependant, il y a plus encore, et l'importance de l'Arithmétique est à la fois d'ordre philosophique, d'ordre pédagogique et d'ordre pratique.

C'est qu'elle comprend, en effet, deux branches fort distinctes : d'une part, les procédés de calcul, indispensables à connaître, du moins dans les parties les plus élémentaires, pour les usages courants de la vie ; et de l'autre, ce qu'on pourrait appeler l'Arithmétique scientifique, c'est-à-dire l'étude des propriétés et des relations que les nombres présentent.

Le nombre. — Nous avons eu déjà l'occasion d'employer ce mot, sans nous appesantir sur l'idée fondamentale qu'il représente. Le moment est venu de serrer la question d'un peu plus près.

Bien des définitions du nombre ont été proposées. L'une d'entre elles, la plus précise à mon avis, et que j'ai eu l'occasion de présenter déjà, ne m'appartient pas en propre ; elle m'a été suggérée par M. Hermann Laurent, auquel en revient tout le mérite. La voici.

« On appelle *nombre* une *locution* et un *signe* qui servent à désigner avec précision une quantité, et toutes celles qui lui sont égales, de manière à les distinguer nettement de toutes celles qui sont différentes ».

Cette manière de s'exprimer ne peut laisser aucun doute, alors que les faits du monde extérieur, c'est-à-dire l'observation et l'expérience, nous ont donné la

notion précise de la quantité; l'égalité entre deux quantités nous est révélée aussi par la nature même des choses, accompagnée de l'idée instinctive d'abstraction, qui nous amène à considérer comme identiques des objets dissemblables en réalité, mais que nous assimilons entre eux par une opération de notre esprit, ainsi que nous l'avons expliqué.

Une fois le nombre créé pour une catégorie particulière d'objets, on comprend qu'il pourra servir tout aussi bien pour toute autre catégorie. Par exemple, nous avons compté des grains de blé, et nous en avons trouvé 25 ; la *locution* vingt-cinq, le *signe* 25 nous serviront indifféremment à compter des arbres, des mètres, des litres, des grammes, etc.

Ce signe 25 pris en lui-même est le nombre abstrait qui pourra s'appliquer à des quantités de toute nature; à proprement parler, il n'y a pas de nombres abstraits égaux entre eux ; il y a le nombre 25, par exemple, qui diffère de tous les autres. Écrire $25 = 25$ est un truisme n'apportant à notre esprit aucune connaissance nouvelle, et qui équivaut à peu près à des phrases telles que : « Je suis moi ; une maison est une maison ».

Il n'en résulte pas néanmoins que de telles évidences soient toujours inutiles, et nous aurions tort d'en proscrire l'emploi.

Rapport. — Il est permis de se demander si l'idée de rapport, généralement reléguée assez loin dans l'étude de l'arithmétique, ne mériterait pas de prendre place dès le début, comme conséquence de la notion de nombre. Si, par exemple, voulant mesurer une longueur, je l'ai comparée à un mètre, et j'ai trouvé qu'elle contient 24 fois un mètre, le nombre abstrait 24 représente le résultat de la comparaison entre la longueur dont il s'agit et celle d'un mètre. Il est bien clair que si l'unité choisie avait été une longueur de 2 mètres, j'aurais trouvé 12, et non plus 24, comme nombre repré-

sentant la longueur ; si l'unité avait été 6 mètres, j'aurais trouvé 4, et ainsi de suite ; on ne commet donc aucune pétition de principe en affirmant que le nombre abstrait qui détermine une quantité concrète représente le *rapport* entre cette quantité et la quantité de même espèce qui a été choisie comme unité, ce choix restant d'ailleurs à notre disposition ; et en procédant ainsi, on introduit franchement dans la science des grandeurs une notion qui est adéquate à celle de mesure, qui correspond à celle du nombre et qui n'est pas au fond plus compliquée. Cette idée fondamentale ainsi placée dès le début a le mérite d'établir nettement cette vérité, que nous ne pouvons arriver à avoir connaissance des grandeurs que par voie relative ; elle présente en outre l'avantage de simplifier et d'éclaircir la définition des opérations, ou du moins de la multiplication, comme nous allons le voir dans un instant.

Numération. — Le nombre, sous sa forme la plus élémentaire, nous est révélé par l'évaluation des collections d'objets de même nature (ou supposés de même nature par abstraction) : c'est le *nombre entier*. La première question qui se présente à nous en arithmétique est donc l'établissement du système des *locutions* et des *signes* permettant de représenter et d'exprimer les nombres entiers. C'est l'objet de la *numération*, qui se subdivise ainsi en *numération parlée* et *numération écrite*. Il y a une infinité de numérations ; celle qui est à peu près universellement adoptée, que tout le monde connaît et par laquelle il convient de débuter dans une première étude, est la *numération décimale*, sur les principes de laquelle il nous semble inutile d'insister ici.

Opérations élémentaires. — Nous voilà en possession de la notion du nombre et des moyens de représenter les nombres entiers. Il s'agit maintenant de tirer parti de ces éléments pour combiner les nombres les

uns avec les autres, pour effectuer ce que l'on appelle les opérations arithmétiques.

Ces opérations, comme on sait, du moins les opérations élémentaires, dont toutes les autres découlent, sont au nombre de quatre.

L'*addition* des nombres entiers est encore une de ces idées fournies par l'observation du monde extérieur, et qui sont plus simples en elles-mêmes que toutes les définitions qu'on tenterait d'en donner. Ajouter, réunir, mettre ensemble des collections d'objets, cela représente à notre esprit quelque chose de très compréhensible ; et il en résulte aussi cette propriété essentielle de l'addition, que l'ordre dans lequel ont été ajoutés les nombres que l'on veut ajouter n'influe en aucune manière sur le résultat, c'est-à-dire sur la *somme*.

La *soustraction* se définit immédiatement comme opération inverse de l'addition. Si en ajoutant A et B, j'ai trouvé C pour somme, je dis qu'en soustrayant B de C, je trouverai A pour différence. Il s'ensuit immédiatement qu'en soustrayant A de C, je trouverais B pour différence.

La *multiplication* des nombres entiers, sous la forme la plus simple, se définit par l'addition. Multiplier un nombre (multiplicande) par 7 (multiplicateur), c'est former une somme de 7 nombres tous égaux au multiplicande. Il importe de remarquer dès l'abord que le multiplicateur est forcément un nombre abstrait. Si la notion de rapport a été introduite, comme nous l'avons proposé un peu plus haut, il en résulte aussi que la multiplication peut être définie de cette autre manière : formation d'un nombre (produit) qui ait avec le multiplicande le même rapport que celui du multiplicateur avec l'unité. En d'autres termes, le nombre qui mesurerait le produit, si le multiplicande était pris pour unité, n'est autre que le multiplicateur. On arrive ainsi d'un coup à une définition tout à fait générale, et entièrement satisfaisante au point de vue philosophique.

Il suit de là que le produit sera un nombre concret ou abstrait, suivant que le multiplicande sera lui-même concret ou abstrait.

On démontre que l'ordre des facteurs, dans la multiplication des nombres entiers, est sans influence sur le produit. Le produit de A par B, ou de B par A, étant C, on définira la *division* en disant que A est le résultat ou *quotient* obtenu lorsqu'on divise C par B, ou B le résultat obtenu lorsqu'on divise C par A.

L'Arithmétique nous enseigne les moyens d'effectuer les opérations dont nous venons de parler. En même temps, elle envisage les propriétés que présentent ces opérations, étend quelques-unes d'entre elles, comme la multiplication, qui s'applique à des produits d'autant de nombres (ou *facteurs*) qu'on voudra. En outre, elle établit que la division n'est pas toujours possible, et montre comment elle peut le devenir au prix d'une modification légère dans la définition.

Divisibilité. — L'examen des conditions de possibilité de la division engendre la théorie de la divisibilité, l'un des chapitres intéressants de l'arithmétique, mais que celle-ci ne peut étudier que dans ses parties les plus élémentaires. C'est de là, en effet, que la théorie des nombres premiers tire son origine, et cette théorie est à la fois l'une des branches les plus difficiles et les moins complètement connues de la Mathématique.

Quand le produit de A par B est égal à C, il s'ensuit que la division de C par A, ou par B, peut se faire exactement. On dit alors que C admet A et B comme diviseurs, ou que C est divisible, soit par A, soit par B. Tout nombre C est évidemment divisible par lui-même, ce qui donne 1 comme quotient, et aussi par l'unité, ce qui donne C pour quotient. Si un nombre n'admet pas d'autres diviseurs que ceux-là, comme 7 par exemple, c'est un nombre *premier*. Dans le cas contraire, il est *composé*. L'étude de la répartition des nombres pre-

miers, à mesure que l'on s'avance dans l'échelle indéfinie des nombres entiers, est d'une difficulté effroyable, et c'est à peine si elle a été abordée. L'Arithmétique élémentaire peut donc à peine l'effleurer. Mais elle établit aisément que tout nombre composé est un produit de facteurs premiers; elle montre comment on forme ce produit, qui ne peut être obtenu pour chaque nombre que par les mêmes facteurs; enfin, elle fournit des règles sûres pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, les diviseurs communs à deux ou plusieurs nombres différents, et en particulier le plus grand de ces diviseurs communs, qui joue un rôle important dans cette partie de la science du calcul.

On rencontre, en s'engageant dans cette voie, un certain nombre de propositions dont l'utilité est manifeste au point de vue de la pratique des opérations, et dont l'intérêt théorique est peut-être encore plus grand.

Les fractions. — Jusqu'ici, nous n'avons opéré que sur des nombres entiers; mais, suivant la nature des grandeurs concrètes soumises au calcul, il peut fort bien arriver que le calcul des mesures, limité à ce domaine, se trouve insuffisant. De cette nécessité nouvelle découle le calcul des fractions. Si l'unité concrète, par sa nature, est subdivisible en parties égales, chacune de ces parties, prise isolément, pourra être considérée comme une unité nouvelle. Une notation spéciale, et bien connue, permet de représenter une fraction; $\frac{2}{3}$ par exemple, représente deux fois une quantité obtenue en divisant l'unité en trois parties égales; $\frac{2}{3}$ d'une pomme, $\frac{2}{3}$ d'un mètre ont une signification nette et précise; mais $\frac{2}{3}$ d'un homme exprimerait une absurdité; on voit que la nature concrète de l'unité joue ici un rôle important, ce qui n'empêche en rien, du reste, de considérer en soi le nombre abstrait $\frac{2}{3}$. Seulement, lorsque dans une question

arithmétique, il s'agira d'effectuer le retour de l'abstrait au concret, cela nous obligera à une précaution spéciale.

L'Arithmétique, abordant l'étude des fractions, étend à ces nombres toutes les opérations élémentaires, et c'est tout un champ nouveau sur lequel la science du calcul vient de la sorte exercer son action.

Dans ces dernières années, il y a eu certaines tentatives faites en faveur d'une théorie nouvelle des fractions que nous voulons seulement indiquer en quelques mots, et qui nous paraît donner prise, au point de vue philosophique, aux critiques les plus justifiées. Dans cette doctrine, on prétend se passer de la divisibilité de l'unité; $\frac{2}{3}$ est, par définition, un symbole se composant des deux nombres entiers 2 et 3 séparés par un trait. Sur ces symboles, au moyen de conventions préalablement faites, on établit des propositions, puis des règles de calcul, qui sont d'ailleurs en complète concordance, bien entendu, avec les procédés de l'Arithmétique ordinaire.

Quel que soit le talent des propagateurs de semblables théories, il est nécessaire de réagir énergiquement contre l'état d'esprit qu'elles nous révèlent. En continuant dans une pareille voie, on marcherait dans un sens radicalement contraire à celui du progrès. Cette préoccupation du symbolisme à outrance, qui se retrouve dans certaines manifestations littéraires ou philosophiques, et non pas seulement dans le domaine mathématique, répond en réalité à une sorte de sentiment de mépris pour les vérités que nous apporte la connaissance raisonnée du monde extérieur. Par une aberration pour ainsi dire incompréhensible, on en arrive à se figurer la science mathématique comme d'autant plus parfaite qu'elle emprunte moins à la connaissance extérieure des faits. On la regarderait volontiers comme idéale, si elle se passait totalement de cette

connaissance, et se bornait à raisonner sur des abstractions. On oublie que l'abstraction elle-même suppose la notion préalable des choses, on obscurcit les propositions simples, on rend difficile ce qui est aisé, on jette le scepticisme dans les esprits en accumulant ainsi comme à plaisir les obstacles artificiels, on contredit enfin la nature elle-même.

Ceci n'est pas une discussion ; la place nous manquerait pour nous y livrer avec les développements nécessaires. Nous avons simplement voulu établir, à l'occasion de cette question des fractions arithmétiques, une protestation contre des théories dites modernes, et beaucoup moins modernes qu'elles n'en ont l'air, car l'esprit sophiste qui les inspire est aussi vieux que le monde ; et leur triomphe, si malheureusement il se produisait, serait marqué par une période inévitable de décadence.

L'infini en Arithmétique. — La notion mathématique de l'infini s'est indirectement présentée à nous dès les débuts de l'Arithmétique. En formant successivement les nombres entiers, il tombe sous le sens que la suite qu'ils forment ne s'arrête jamais, puisqu'à chacun d'eux, si grand qu'il soit, on peut ajouter une unité, pour former un autre nombre plus grand encore. Cette notion revient encore à propos des nombres premiers, puisqu'on démontre, très aisément d'ailleurs, que la suite qu'ils forment est illimitée.

Mais c'est surtout dans l'étude des fractions que l'idée de l'infini se présente sous une forme qui nous oblige à l'introduire dans le calcul lui-même. Je veux parler de la conversion des fractions ordinaires en décimales, laquelle donne naissance aux fractions décimales périodiques, qu'en réalité nous ne pouvons écrire, puisqu'elles se composent d'un nombre illimité de chiffres décimaux, mais que nous indiquons cependant d'une manière précise, parce que les chiffres finissent par se

succéder d'une façon régulière, les mêmes chiffres revenant dans le même ordre. Dans une étude un peu complète de l'Arithmétique, cette théorie des fractions périodiques mérite de tenir une place considérable, en raison des vues qu'elle permet de prendre sur une foule de questions qui s'y rattachent.

Ce sont aussi les fractions qui nous amènent pour la première fois à l'idée de l'infiniment petit. Si l'on considère la fraction $\frac{1}{A}$, et si A est un nombre entier très grand, la fraction elle-même sera très petite, d'autant plus petite que A sera plus grand. Si A, par la pensée, représente un nombre qui prend successivement les valeurs de tous les nombres entiers successifs, nous établissons que la fraction $\frac{1}{A}$ diminuera sans cesse, et qu'elle finira par prendre une valeur aussi petite que nous le voudrons, pourvu que nous donnions à A une valeur entière suffisamment grande. C'est ce qu'on exprime mathématiquement en disant que $\frac{1}{A}$ est une quantité variable qui a pour *limite* zéro, ou encore que $\frac{1}{A}$ est un *infiniment petit*.

Ces idées s'introduisent fatalement en Arithmétique; peut-être serait-il sage d'introduire en même temps les locutions et les notations nécessaires pour exprimer les idées, au lieu de renvoyer ces notions simples à beaucoup plus tard.

Les incommensurables. — Encore un sujet sur lequel ont été versés des flots d'encre, qui a donné lieu à d'interminables discussions, et qui est, par nature, absolument inextricable ou d'une extrême simplicité philosophique, suivant l'ordre d'idées qu'on adopte.

Persévérant dans la doctrine que nous suivons systématiquement, nous n'avons qu'à considérer les grandeurs concrètes naturelles, pour nous convaincre que certaines d'entre elles présentent un caractère de con-

tinuité. Nous ne pouvons pas imaginer, par exemple, qu'une longueur d'un mètre soit parcourue par un point d'un bout à l'autre, sans que le nombre qui mesurera la longueur comprise entre l'origine et le point en question passe par *toutes* les valeurs comprises entre zéro et un. Or, parmi ces valeurs, en nombre infini, il en est que nous ne pouvons exprimer par une fraction (ni, bien entendu, à plus forte raison, par un nombre entier). Ce sont là les nombres incommensurables, dont nous avons l'idée concrète très nette, et que cependant nous ne pouvons représenter par les symboles abstraits créés jusqu'ici. Nous définirons cependant, d'une manière très précise, un nombre incommensurable A par une suite de fractions a_1, a_2,... a_n, en nombre indéfini, et qui croissent sans cesse, et par une seconde suite de fractions b_1, b_2,...b_n, qui décroissent sans cesse, s'il est bien établi : 1° que A est toujours supérieur à toute fraction a ; 2° qu'il est toujours inférieur à toute fraction b ; 3° qu'en prenant n suffisamment grand, la différence entre b_n et a_n peut devenir aussi petite qu'on le voudra, c'est-à-dire inférieure à tout nombre assigné. Le symbole A prendra alors une signification précise ; ce sera la limite, soit des fractions a, soit des fractions b. Nous aurons ainsi précisé par un signe et par une locution le nombre qui peut servir de mesure à la quantité concrète répondant à A.

En Arithmétique, c'est par le calcul des racines que s'introduisent pour la première fois les incommensurables. Un produit de plusieurs facteurs égaux entre eux est ce qu'on appelle une puissance. Par exemple $a\,a\,a\,a\,a$, qui s'écrit avantageusement a^5, est la *cinquième puissance* de a. Si nous appelons N cette cinquième puissance, et que, voulant faire l'opération inverse, nous cherchions, connaissant N, à trouver a, nous dirons que a est la *racine cinquième* de N. Si nous donnions $N = 32$, il serait aisé de reconnaître que $a = 2$. L'Arithmétique, pour les racines 2[es] et 3[es] tout au

moins, qu'on appelle racines *carrées* et *cubiques*, donne les moyens de faire cette opération. Mais il s'en faut qu'elle soit toujours possible. Ainsi, que l'on se propose d'extraire la racine carrée de 2 : nous saurons trouver des fractions qui, élevées au carré, donneront toujours des résultats de plus en plus grands, mais constamment inférieurs à 2 : nous aurons aussi d'autres fractions, dont les carrés seront de plus en plus petits, mais toujours supérieurs à 2 ; enfin, l'une des premières fractions différera aussi peu que nous le voudrons de la fraction correspondante de la deuxième suite, pourvu qu'on la prenne assez éloignée. Dès lors, nous ne pouvons écrire le nombre qui représente la racine carrée de 2, ni sous forme entière, ni sous forme fractionnaire ; mais ce nombre est parfaitement défini, à l'exclusion de tout autre, et il l'est tellement que la Géométrie nous permet de construire très simplement une longueur mesurée par ce nombre ; le signe $\sqrt{2}$ sera donc l'expression très nette du nombre que nous avons voulu représenter.

En essayant de trouver des difficultés qui n'existent pas (alors que tant de difficultés sérieuses seraient plus dignes des efforts de l'esprit humain) et en voulant toujours se placer dans le domaine de l'abstraction et de l'absolu, certains savants en sont arrivés à se demander *si le nombre* $\sqrt{2}$ *existe* !

Autant se demander si 2 existe ; je sais bien ce que c'est que 2 arbres, 2 ânes ou 2 kilomètres ; mais 2 tout seul, comme nombre abstrait, n'existe qu'à l'état de création du cerveau et de signe représentatif. De même $\sqrt{2}$ a une existence pareille ; c'est un signe visible, qui représente une notion nettement définie ; c'est la traduction précise d'une quantité concrète, si je l'applique au mètre pour unité, puisque je sais construire la longueur $\sqrt{2}$. La seule différence, c'est que je ne pourrai appliquer le symbole d'un nombre incommensurable qu'à des grandeurs continues

par essence, aussi bien que je ne peux appliquer le symbole d'une fraction qu'à des quantités divisibles.

Sur ces bases conformes à la raison, au bon sens et à l'observation des faits, le calcul des nombres incommensurables peut s'établir en toute rigueur en Arithmétique.

On peut utilement y rattacher le chapitre des approximations et des erreurs, du moins dans les parties les plus élémentaires. C'est d'autant plus utile que, dans l'application, un judicieux emploi de la Mathématique exige une intervention à peu près constante de cette théorie.

Proportions. — Nous avons dit les avantages que présenterait l'introduction de la notion de rapport dès le début de l'Arithmétique. L'étude des égalités entre les rapports fait l'objet de la théorie des proportions, qui conduit à la solution d'un grand nombre de questions pratiques, par l'application des procédés appelés, assez improprement du reste, règles de trois.

Cette partie de l'Arithmétique, en dehors des applications utiles, présente un grand intérêt, en ce qu'elle permet, sous une forme exceptionnellement simple, et au moyen d'exemples tangibles empruntés aux faits, d'ouvrir pour la première fois l'esprit à la conception des quantités variables et à l'idée de fonction, sur laquelle nous reviendrons plus tard. Sans empiéter sur un domaine qui n'est pas le sien, et en poursuivant seulement le problème des évaluations, l'Arithmétique embrasse donc avec raison l'étude des grandeurs proportionnelles et fournit de précieux procédés de calcul à ce sujet.

Système des mesures. — En France surtout, l'Arithmétique, réduite même à sa partie la plus élémentaire, consacre un important chapitre à l'exposé du système des mesures ou du *système métrique*. Il n'y a ici ni théorie ni règles de calcul spéciales à proprement

parler. Mais les explications nécessaires pour faire clairement comprendre l'ensemble de ces unités, devant s'appliquer à toutes les grandeurs usuelles, n'en sont pas moins d'une haute utilité. Elles se rattachent d'ailleurs sur bien des points à des notions géométriques ou mécaniques, qui, pour être présentées d'une façon rapide et sommaire, sont cependant très utiles en vue d'une étude ultérieure plus complète. Il faudrait donc se garder de voir dans l'étude du système métrique une simple nomenclature sèche, dans laquelle on ne ferait appel qu'à la mémoire. Ce serait en méconnaître l'esprit et la portée.

Calculs arithmétiques d'ordre supérieur. — Les ordres d'idées que nous avons signalés jusqu'ici représentent à peu près tout ce qui constitue la partie élémentaire de l'Arithmétique. Rationnellement, on doit aussi faire rentrer dans son domaine, d'après la donnée générale d'Auguste Comte, des opérations qui prennent ordinairement place dans d'autres branches de la science. C'est ainsi que le calcul numérique des séries, la théorie des logarithmes, et même la résolution numérique des équations, pour ne citer que peu d'exemples, relèvent de l'Arithmétique à proprement parler. Seulement, il faut remarquer d'abord que les calculs de cette nature, même les plus compliqués, dérivent au fond de simples combinaisons des opérations élémentaires. D'un autre côté, l'Arithmétique, dans les questions dont il s'agit, ne peut guère intervenir utilement qu'après une préparation préalable, une étude des relations et des propriétés, qui est faite par les soins de l'Algèbre. Aussi n'y a-t-il pas un sérieux inconvénient, même au point de vue de la pure doctrine, à borner le domaine de l'Arithmétique proprement dite aux limites indiquées, et qui suffisent déjà à lui assurer une place bien importante dans l'ensemble de la Mathématique.

Arithmologie. — A l'Arithmétique, comme nous l'avons indiqué déjà d'un mot, doit être rattachée une partie de la science comprenant l'étude des propriétés qui appartiennent aux nombres, et qu'on a caractérisée dans les temps modernes du nom d'*Arithmologie*.

Cette partie de la science, si peu avancée, exerce une attraction extrême sur ceux qui s'y adonnent ; elle a été cultivée par les plus illustres mathématiciens ; c'est à elle que Gauss doit une bonne partie de sa gloire, et Fermat y a consacré les plus grands efforts. L'intérêt de l'Arithmologie, ou *Théorie des nombres*, l'attrait particulier qu'elle inspire, tiennent en grande partie au caractère mystérieux, en quelque sorte, des propositions qu'elle comporte, et à la disproportion singulière entre la simplicité des énoncés et la difficulté ou même l'impossibilité d'établir les démonstrations.

Nous avons indiqué plus haut le problème de la répartition des nombres premiers. Voici quelques autres exemples de questions arithmologiques restées jusqu'ici insolubles malgré d'innombrables efforts.

« La somme des puissances semblables de deux nombres entiers ne peut pas donner une puissance exacte de même degré, à moins que les puissances ne soient simplement des carrés » (Théorème de Fermat).

Autrement dit, l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible avec des valeurs entières de x, y, z, si n est différent de 2.

« Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers. » (Théorème de Goldbach).

« Peut-on trouver deux nombres entiers consécutifs, autres que 8 et 9, qui soient des puissances exactes de nombres entiers » (Théorème de Catalan) ?

L'extrême difficulté de ces questions et de beaucoup d'autres, en Arithmologie, tient à l'absence de méthodes. Il ne faudrait pas croire cependant que tant d'efforts des plus grandes gloires mathématiques soient restés totalement infructueux. On a pu, tout d'abord, étendre

certaines théories de l'Arithmétique élémentaire, résoudre un grand nombre de propositions particulières, rattacher quelques questions arithmétiques aux plus hautes spéculations du calcul infinitésimal, faire progresser jusqu'à un certain point la théorie des équations indéterminées, apporter à l'Algèbre un secours inattendu et parfois en faire autant pour la Géométrie, comme il est arrivé pour la résolution des équations binomes et pour l'inscription, dans le cercle, des polygones réguliers.

La considération de certaines *suites arithmétiques*, parmi lesquelles les *progressions*, soit par différence, soit par quotient, a souvent aussi fourni de précieux résultats. En dehors des progressions, nous donnerons ici comme unique exemple la série qu'on appelle souvent série de Lamé, et qui appartient en réalité à *Fibonacci* (Léonard de Pise) :

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad \ldots\ldots$$

Elle se forme en ajoutant toujours deux termes consécutifs pour obtenir le suivant, et elle jouit de propriétés nombreuses, qui sont utilisables dans une foule de questions.

La formation des *puissances d'un binome*, le *triangle arithmétique* de Pascal, le *carré arithmétique* de Fermat, doivent prendre place également dans l'Arithmologie, et pourront même être introduits avec avantage dans les éléments de l'Arithmétique, bien qu'on classe en général dans l'Algèbre toutes ces questions.

Un très grand nombre de questions concernant l'*analyse combinatoire*, c'est-à-dire l'étude des groupements des choses, en tenant compte de l'ordre et de la nature, appartiennent encore au domaine de l'Arithmologie. Il en est de même de ce qui concerne les *nombres polygonaux* et les *nombres figurés*, dérivant des séries arithmétiques. C'est également à l'Arithmologie que se rattachent, au moins par certains côtés, les problèmes de

géométrie de situation, si attachants et souvent si difficiles, parmi lesquels nous pouvons citer en passant les *carrés magiques* et les figures magiques en général.

Nous avons dit que l'une des grandes difficultés de l'Arithmologie réside dans l'absence des méthodes qui s'offrent en général dans les autres branches de la Mathématique. Il importe donc d'autant plus de s'attacher au petit nombre de celles qui ont été créées par quelques esprits supérieurs, et nous ne saurions, dans cet ordre d'idées, passer sous silence la définition des congruences, qui est due à Gauss et qui offre de précieuses ressources. Lorsque deux nombres, a et b, divisés par un même nombre p, donnent le même reste, on dit qu'ils sont *congrus par rapport au module* p. Cette relation s'appelle une *congruence*, et s'écrit :

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

Par exemple, 23 et 9 sont congrus par rapport à 7 ; il en est de même de 23 et de 2 ; par rapport au même module 7, le nombre 21 est congru à 0, etc. Les opérations qu'on peut faire sur les congruences sont souvent d'un secours puissant en Arithmologie.

Nous ne voulons pas quitter ce sujet sans citer un savant qui a poussé très loin l'étude de l'Arithmétique supérieure, et qui fut malheureusement enlevé à la science d'une façon prématurée, dans toute la force de son talent, et avant d'avoir produit tout ce qu'on était en droit d'en attendre. Dans le premier (et unique) volume de sa *Théorie des nombres*, paru en 1891, l'année même de sa mort, Edouard Lucas, car c'est de lui que nous parlons, jette au cours de sa Préface quelques aperçus si justes et si intéressants sur la science des nombres, que nous n'hésitons pas à lui emprunter une courte citation, par laquelle nous terminerons ce chapitre.

« Comme toutes les sciences, l'Arithmétique résulte de l'observation ; elle progresse par l'étude des phéno-

mènes numériques donnés par des calculs antérieurs, ou fabriqués, pour ainsi dire, par l'expérimentation ; mais elle n'exige aucun laboratoire et possède seule le privilège de convertir ses inductions en théorèmes déductifs. Comme en Chimie, par exemple, on prépare les nombres au moyen du calcul ; par la divisibilité, on décompose ceux-ci en éléments simples, les facteurs premiers ; par la théorie des résidus potentiels, on détermine leur aspect, et en quelque sorte leurs réactions mutuelles ; enfin, par la juxtaposition des nombres triangulaires, carrés, polygones, cubiques, etc., la théorie des formes numériques rappelle l'étude des systèmes cristallins. C'est par l'observation du dernier chiffre dans les puissances successives des nombres entiers que Fermat, notre *Divus arithmeticus*, créa l'Arithmétique supérieure, en donnant l'énoncé d'un théorème fondamental ; c'est par la méthode expérimentale, en recherchant la démonstration de cette proposition, que la théorie des racines primitives fut imaginée par Euler ; c'est par l'emploi immédiat de ces racines primitives que Gauss obtint son célèbre théorème sur la division de la circonférence en parties égales ; et celui-ci fut le point de départ des profondes recherches d'Abel et de Galois, de MM. Kummer, Hermite et Kronecker, dans l'Algèbre supérieure ».

CHAPITRE III

L'Algèbre.

Les fonctions. — D'après la conception très juste d'Auguste Comte, l'Algèbre a pour objet le calcul des fonctions, par opposition avec l'Arithmétique, qui se propose le calcul des valeurs. Il est donc nécessaire, avant tout, de présenter maintenant cette notion de *fonction*, si fondamentale dans toute la doctrine mathématique. Hâtons-nous de dire que cet aperçu rapide ne saurait suffire à caractériser entièrement l'Algèbre, et que nous devrons ensuite revenir quelque peu sur nos pas, pour essayer de délimiter un peu nettement, sinon d'une manière absolue, chose impossible, le domaine de l'Algèbre.

Cherchons en premier lieu, pour ne pas abandonner la méthode constamment suivie par nous, à nous rendre compte des faits que nous présente le monde extérieur. Deux circonstances générales frappent notre esprit : c'est que tout ce que nous voyons est l'objet de continuelles transformations, et, d'autre part, que ces changements sont liés les uns aux autres. L'idée de variabilité, l'idée de loi s'introduisent ainsi spontanément dans notre esprit, sous la forme suivante : les choses changent, et les changements ont pour causes immédiates d'autres changements. Ceci est vrai dans tous les ordres de faits : qu'il s'agisse du monde physique

et matériel, des phénomènes moraux, de ce qui relève de l'imagination pure, les exemples se présentent en foule à la pensée.

Mais, pour l'objet que nous avons en vue, il importe de descendre immédiatement de cette extrême généralité, en nous contentant d'appliquer cette observation aux choses mesurables, c'est-à-dire aux grandeurs, qui seules relèvent de la Mathématique. Un exemple va nous permettre de préciser davantage. Parmi les grandeurs naturelles, la *variable* par excellence, dont nous avons la notion instinctive avant de savoir même la mesurer, c'est le temps. Supposons que nous prenions une pierre, et que nous l'abandonnions à elle-même, au-dessus du sol ; elle va se mettre en mouvement, et dans toute la période qui s'écoule jusqu'à ce qu'elle touche le sol, elle parcourt un chemin tel que sa position à chaque instant est nettement déterminée. Si nous imaginons, à cet instant, qu'on ait mesuré la longueur du chemin parcouru depuis que nous avons lâché la pierre, et aussi le temps qui s'est écoulé depuis cet abandon, nous avons le sentiment très net que cette longueur, variable, est liée au temps écoulé, également variable ; l'une dépend de l'autre ; la longueur, dans cet exemple, sera d'autant plus grande que le temps écoulé sera plus grand, et l'on comprend que, connaissant le temps écoulé, il sera possible de trouver la longueur du chemin parcouru. C'est ce qu'on traduira, en langage mathématique, en disant que *la longueur du chemin parcouru est une* FONCTION *du temps employé à la parcourir*. Il en serait de même si nous considérions le chemin parcouru par un train de chemin de fer se rendant d'une ville à une autre ; mais la fonction, dans ce dernier cas, ne serait plus du tout la même que dans le premier.

Toutes les fois que les choses variables, comme dans ces exemples, sont des grandeurs mesurables, toutes les fois que l'on peut, en outre, exprimer d'une façon

précise la relation qui doit exister entre les nombres qui correspondent à ces grandeurs, la fonction considérée est du domaine mathématique. Dans la réalité des faits, les fonctions mathématiques ne se présentent pas dans la nature, à cause de la complexité infinie des phénomènes. On comprend en effet qu'une variable puisse dépendre des variations de plusieurs autres variables, et non pas d'une seule ; en fait, il en est toujours ainsi, et le nombre des variables qui interviennent dans un fait physique quelconque dépasse même l'imagination ; cela ne diminue d'ailleurs en rien, comme nous le verrons, l'importance et l'utilité des fonctions mathématiques.

Reprenons notre exemple de la chute d'une pierre. Cette chute, que nous avons considérée d'une façon générale et un peu superficielle, ne s'opère pas aussi simplement que nous avons pu le croire tout d'abord : la pierre tombe dans l'air ; de là une résistance qui altère le mouvement ; si cet air est lui-même agité, deuxième cause de perturbation ; en tout cas, la résistance dépendra aussi de la forme de la pierre, de sa constitution physique, peut-être de sa composition chimique. Et puis, cette pierre n'est pas un point : peut-être tournera-t-elle tout en tombant ; que voudra dire alors la longueur du chemin parcouru ? Mais supposons qu'il s'agisse d'un objet assez petit pour que nous négligions tous ces détails, d'une petite boule de plomb par exemple, et que nous fassions tomber cette boule dans un endroit complètement dépourvu d'air, si difficile, si impossible même, que cela soit en réalité. Nous n'en avons pas encore fini. Nous remarquons en effet que les longueurs parcourues, pour un temps donné, dépendront de la hauteur à laquelle on se trouve placé. Suivant qu'on fera l'expérience au bord de la mer ou bien au sommet du mont Blanc, le résultat ne sera pas le même ; il ne sera pas le même non plus, si l'on se trouve près de l'équateur, ou bien dans une région voi-

sine du pôle. Ainsi, la hauteur de chute est fonction, non pas seulement du temps de chute, mais encore de l'altitude et de la latitude. Et encore n'avons-nous pas fait entrer en ligne de compte le mouvement de rotation de la terre, ni sa circulation autour du soleil, qui compliquent singulièrement le phénomène.

Nous voyons, par cet exemple, combien le fait naturel le plus ordinaire présente de complexité, si l'on veut l'analyser rigoureusement, et combien une grandeur variable dépend d'autres grandeurs variables en nombre considérable. Cependant, on obtient une approximation qui peut différer très peu de la vérité, en négligeant plus ou moins de ces causes accessoires, pourvu qu'on fasse avec discernement cette *abstraction*, analogue à l'opération du même nom que nous avons considérée au début du chapitre précédent. Cette abstraction opérée, dans l'exemple dont il s'agit, nous pourrons dire que le chemin parcouru par un corps pesant qui tombe dans le vide est une fonction du temps depuis lequel il tombe. L'expérience nous apprend qu'au bout de une, deux, trois secondes, et ainsi de suite, les longueurs parcourues seront entre elles comme les nombres 1, 4, 9, etc. C'est ce qu'on traduit par cette loi physique : *les espaces parcourus par un corps pesant qui tombe dans le vide sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir* ; mathématiquement, on dira que l'espace est mesuré par un nombre exprimé par kt^2 ; c'est un exemple d'une fonction mathématique, k étant un nombre constant, t le nombre qui exprime le temps de chute, t^2 le carré de ce nombre, et kt^2 le produit de k par t^2.

Si nous avons un peu insisté sur cet exemple très simple, c'est pour faire comprendre clairement comment la nature nous offre le spectacle de variables dépendantes ou fonctions, lesquelles dépendent elles-mêmes d'autres variables, dites indépendantes; et comment il est possible, dans certains cas, d'exprimer cette

dépendance par des opérations de calcul, pourvu que les variables soient du domaine des grandeurs mesurables, et pourvu qu'une abstraction préalable nous ait permis de remplacer le phénomène compliqué par un autre plus simple, dans lequel nous saurons indiquer quelles sont les opérations à faire sur les variables (ou sur la variable) pour obtenir la fonction.

Une fois qu'on en est là, le problème est, on le voit, d'un ordre tout différent de ce qu'il était d'abord et appartient exclusivement à la Mathématique. En représentant toutes les quantités (ou plutôt les nombres qui les mesurent) par des lettres, on pourra, au moyen de signes convenables, exprimer les opérations qu'il faut effectuer sur les nombres représentant les variables indépendantes pour obtenir celui qui représente la fonction.

Langage algébrique. — L'ensemble des signes en question constitue ce qu'on pourrait appeler l'*alphabet* de l'Algèbre. Celle-ci nous apprend à combiner ces signes, à les associer, à les transformer, et à obtenir, par les tableaux d'opérations à effectuer, ce qu'on appelle les *formules* algébriques. La science qui nous occupe prend ainsi le caractère d'une langue écrite, langue merveilleuse dans sa rigueur et sa concision; elle évite les longues circonlocutions, n'emprunte ses règles qu'au raisonnement et à la pure logique, et, partant d'un point de départ extrêmement simple, permet de pousser jusqu'à des limites indéfinies les développements qu'on en peut déduire.

On croit fréquemment, faute d'une éducation mathématique suffisante, que la distinction entre l'Arithmétique et l'Algèbre tient à ce que la première emploie des chiffres et la seconde des lettres pour représenter les nombres. C'est une erreur capitale : l'Arithmétique souvent se sert des lettres avec avantage ; l'Algèbre, et c'est ce qui la distingue, ne poursuit que l'indication des

opérations à faire, en nous fournissant ses formules; une fois les formules obtenues, qu'on emploie chiffres ou lettres, si l'on cherche à déterminer des valeurs, le problème appartient à l'Arithmétique.

Dans le développement de ce langage algébrique, on aura tout d'abord à faire usage des signes qui correspondent aux quatre opérations élémentaires de l'Arithmétique; mais on serait vite arrêté s'il fallait s'en tenir là; aussi la science algébrique s'est-elle enrichie de signes nouveaux, dont le nombre s'accroît chaque jour, et qui présentent l'avantage d'exprimer sous forme concise une succession d'opérations qui seraient sans cela d'une explication longue et difficile. Cette introduction des signes nouveaux est une question de mesure. Si l'on en introduit un trop grand nombre, on surcharge la mémoire et l'on tombe dans les inconvénients de l'alphabet chinois; si l'on refusait systématiquement tout signe nouveau proposé, on se priverait des plus précieux avantages. Il en est un peu de cette question comme de l'introduction des mots dans une langue ordinaire: il finit par se former une tradition et des usages qui ont force de lois.

Ce qu'il y a d'important à retenir ici, c'est ce caractère général de l'Algèbre, et les conséquences considérables qu'entraîne une pareille conception. Puisqu'en effet, au point de vue où nous nous plaçons, l'Algèbre traduit les faits mesurables qui nous sont fournis par l'observation des grandeurs concrètes, sur lesquelles a été opérée l'abstraction nécessaire, il s'ensuit que l'Algèbre variera suivant la nature de ces quantités concrètes, s'il arrive qu'elles présentent par leur essence même des propriétés mathématiques différentes. Il y a donc plutôt *des Algèbres* que *l'Algèbre*. C'est une notion utile à introduire dès maintenant, mais que nous allons bientôt retrouver, dans l'examen des opérations algébriques les plus élémentaires. Nous l'accompagnerons alors des développements qu'elle comporte.

Classification des fonctions. — Les fonctions mathématiques sont en nombre illimité. Suivant qu'elles exigent, pour être exprimées, des signes qui se rapportent aux opérations arithmétiques ordinaires, ou bien des signes nouveaux, on les a classées en fonctions *algébriques* ou *transcendantes*, mots assez mal appropriés, mais qui ont cours, et que l'on ne peut songer à modifier.

Les fonctions algébriques elles-mêmes se subdivisent en fonctions *entières*, *rationnelles*, *irrationnelles*, dont tous les traités fournissent les définitions. Mais il est une notion bien supérieure à toute cette énumération, et à laquelle nous avons hâte d'arriver. Si y représente une quantité variable, et qui ne dépend que d'une seule autre variable, appelée x, on est convenu d'exprimer cette dépendance par un signe tel que $f(x)$ et d'écrire $y = f(x)$. Dans cette expression, f est un symbole qui exprime toutes les opérations à faire sur x pour obtenir y; et si ces opérations sont nettement précisées, nous disons que y est une *fonction explicite* de x ; ainsi, en revenant à notre exemple de la chute d'un corps pesant, nous avons vu qu'en appelant e l'espace, nous obtenions $e = kt^2$; ici, e est une fonction explicite de t. Si nous nous étions proposé de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire de trouver le temps depuis lequel tombe un corps, sachant le chemin qu'il a parcouru, il eût fallu trouver t, connaissant e; l'opération mathématique qui nous permettra d'aboutir à ce résultat en partant de la relation $e = kt^2$ aura pour objet d'*expliciter* la variable t, considérée comme fonction de e; jusque-là, t est une fonction *implicite*.

Équations algébriques. — Lorsqu'on se propose de résoudre un problème quelconque appartenant au domaine mathématique, depuis le plus simple jusqu'au plus compliqué, il y a toujours lieu de considérer certaines grandeurs a, b, c, ..., que l'on connaît, appelées

données ou *quantités connues*; et certaines autres, x, y, z, ... que l'on cherche, et que l'on appelle les *inconnues*. Or, la nature même de la question nous amène inévitablement à un raisonnement de cette forme : si je fais, sur toutes les quantités que je considère, telles opérations, j'aurai le même résultat que si je faisais telles autres opérations.

D'après ce que nous avons dit, cela se traduira en algèbre par une relation d'égalité qui s'écrira ainsi :

$$F(x, y, z, \dots a, b, c, \dots) = \Phi(x, y, z, \dots a, b, c, \dots),$$

ou plus simplement, en représentant par f la différence entre les fonctions F et Φ,

$$f(x, y, z, \dots a, b, c, \dots) = 0.$$

Une telle relation d'égalité entre des inconnues et des données est ce que l'on appelle une *équation algébrique*. Si l'on peut obtenir un nombre suffisant de relations de ce genre, on sera théoriquement en possession des éléments suffisants pour la détermination des quantités inconnues. On voit qu'il faut bien se garder de confondre une équation avec une *identité*, telle que $2 + 3 = 5$, par exemple.

Ceci posé, on peut dire, sans porter aucune atteinte au caractère général de l'Algèbre, qu'elle a pour objet la *résolution des équations*, c'est-à-dire, ce qui revient exactement au même, la transformation des fonctions implicites en fonctions explicites.

Supposons, pour simplifier, que la question ne comporte qu'une seule donnée a et une seule inconnue x. On a une équation $f(x, a) = 0$; cette équation suffit à nous prouver que x est une fonction de a ; mais jusqu'à présent c'est une fonction implicite ; *résoudre* cette équation, c'est en conclure une formule telle que $x = \varphi(a)$, qui nous présentera le tableau exact des opérations à faire sur a pour obtenir x.

Ce problème, même réduit aux termes que nous

venons d'indiquer, c'est-à-dire à une seule équation et une seule inconnue, dépasse et dépassera probablement toujours les limites de l'intelligence humaine. C'est à peine s'il a pu être complètement résolu dans quelques cas très simples que nous allons indiquer. Et cependant, combien ces résultats prennent d'importance et représentent une somme considérable de vérités découvertes et de théories dignes d'intérêt ou même d'admiration !

Classification des équations. — Suivant que, dans une équation algébrique $f(x, y, z, ...) = o$, où nous n'écrivons maintenant que les inconnues, la fonction f sera algébrique ou transcendante, on dira que l'équation est elle-même *algébrique* ou *transcendante*. Lorsque, dans une question, entreront plusieurs équations et plusieurs inconnues, l'ensemble de ces équations formera un *système d'équations*.

On établit qu'une équation algébrique isolée $f(x) = o$, à une seule inconnue, peut toujours se mettre sous une forme telle que $f(x)$ soit un polynome en x, c'est-à-dire une expression de la forme $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_m$. On classe alors les équations algébriques suivant leurs *degrés*, c'est-à-dire suivant le nombre entier qui indique la plus haute puissance de l'inconnue entrant dans $f(x)$. Or, si l'algèbre résout très facilement les équations des deux premiers degrés, si elle fournit des formules, un peu compliquées et d'une application pénible pour le 3ᵉ et le 4ᵉ degré, elle vient s'arrêter impuissante devant les équations du 5ᵉ degré. C'est à ce point que la démonstration de l'impossibilité radicale de résoudre l'équation générale du 5ᵉ degré à l'aide des fonctions ordinaires de l'algèbre a été considérée, à juste titre, comme une découverte importante.

Il est bon d'ajouter, comme compensation, que de nombreux procédés permettent de déterminer les valeurs numériques des racines d'une équation quel-

conque avec telle approximation que l'on désire ; mais c'est un problème qui, par sa nature, relève plutôt de l'Arithmétique que de l'Algèbre, ainsi que nous l'avons indiqué déjà.

Théories algébriques. — En dépit de l'impuissance relative de l'algèbre au delà du 4ᵉ degré, et de la simplicité apparente du problème général dont elle poursuit la solution, les développements de la langue algébrique forment une suite indéfinie de chapitres, dont l'ensemble, dans l'état présent de la science, est un véritable monument qui atteste la puissance de l'esprit humain, et montre quel secours merveilleux apporte au raisonnement la constitution logique d'un système heureusement combiné de signes ou symboles. Chacun de ces chapitres constitue ce qu'on appelle fréquemment une *théorie algébrique*.

Nous n'énumérerons pas les principales théories algébriques; nous ne saurions le faire sans risquer d'être diffus sur certains points, incomplet sur d'autres. Une telle liste n'apprendrait rien d'ailleurs, et, pour la dresser, nous sortirions fatalement du cadre dans lequel nous nous renfermons ici. Mais il est essentiel de remarquer que cet incroyable développement des théories algébriques est relativement tout moderne, et date de l'époque où le génie de Viète introduisit dans cette partie de la science une véritable révolution. C'est lui qui doit être en réalité considéré comme le créateur de l'Algèbre, telle que nous la concevons aujourd'hui. Cette impulsion si puissante est due à une cause fondamentale : avant Viète, on représentait bien les inconnues des questions par des lettres, pour faciliter l'écriture ; il eut l'idée d'appliquer cette représentation aux données elles-mêmes. De ce jour, à la recherche des valeurs se trouvait substituée la recherche des opérations à faire, l'idée de fonction mathématique était portée dans la science, et c'est là l'origine de tant de progrès.

Extension des idées et du langage algébriques. — On n'aurait qu'une idée incomplète de la puissance de l'Algèbre, si l'on croyait devoir en restreindre les applications aux seules grandeurs mesurables que l'on considère en Arithmétique. Longtemps on a cultivé cette erreur ; quelques-uns même la professent encore aujourd'hui ; c'est d'autant plus excusable, que de grands génies, comme celui de Newton, par exemple, n'y ont pas échappé. Le titre d'*Arithmétique universelle*, par lequel il a cru pouvoir caractériser l'Algèbre, et qui n'indique qu'imparfaitement l'objet de cette science, en est une preuve.

Cette conception incomplète a été d'autant plus funeste, qu'elle a contribué pour une bonne part à dénaturer l'esprit même de la science mathématique. On a remarqué, en effet, que le calcul algébrique, en combinant systématiquement les signes sur lesquels il opère, conduisait à des résultats nouveaux et fournissait des formules, alors même que les questions qui avaient servi de point de départ ne comportaient pas de solution. De là l'idée d'attribuer au calcul lui-même une puissance de généralisation particulière et quelque peu mystérieuse, en vertu de laquelle les transformations qu'on opère auraient une véritable valeur créatrice.

La première, et la plus simple, des manifestations de ce fait, se trouve dans la théorie des quantités négatives. Retrancher 5 de 3, en Arithmétique, est une pure impossibilité ; retrancher b de a, en Algèbre, sera toujours faisable, et le résultat s'écrira $a - b$: si l'on suppose que $a = 3$, $b = 5$, on s'imagine que l'algèbre a créé un nombre nouveau, le nombre négatif -2 ; et l'on s'est évertué pendant des siècles à essayer d'*interpréter* ces résultats inattendus, en s'émerveillant de les voir s'adapter aux questions, moyennant certaines modifications.

Ce dont on ne s'était pas aperçu, c'est qu'en insti-

tuant l'Algèbre avec ses signes et ses règles d'opérations, on avait institué par cela même un ensemble de symboles s'appliquant à autre chose que l'objet primitivement en vue.

Sans anticiper sur la Géométrie, dont nous parlerons plus loin, il saute aux yeux que si nous traçons (fig. 1)

O B' A B X

Fig. 1.

une ligne droite OX suffisamment prolongée, nous pourrons représenter tous les nombres de l'Arithmétique par des fragments de cette droite, des *segments*, comme l'on dit, tels que OA, AB, etc., dont la longueur soit mesurée, pour chacun, par le nombre correspondant.

Il devient alors évident que, pour ajouter deux nombres représentés par les segments OA, AB, il suffira de porter l'un d'eux, AB, au bout de l'autre OA, et qu'on aura la somme représentée par le nombre qui mesure OB. Si l'on veut au contraire retrancher AB de OA, il n'y aura qu'à porter AB' de longueur égale à AB, au bout de OA, mais *en sens contraire*, et l'on aura en OB' la différence. Cela va très bien si AB est plus court que OA ; mais s'il devient plus long, l'impossibilité se manifeste par ce fait que nous tombons en dehors de la droite OX, à gauche du point O. Pro-

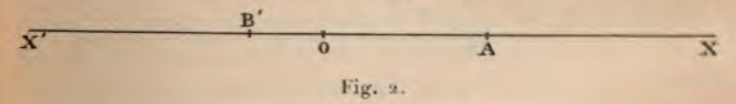


Fig. 2.

longeons au contraire cette droite en OX' (fig. 2), et nous aurons un point B' sur ce prolongement. La différence sera figurée par le segment OB', dirigé à partir du point O, non plus de gauche à droite, mais de droite à gauche.

Sans plus insister, nous voyons que la *demi-droite* OX

nous présente l'image du domaine de toutes les grandeurs arithmétiques, et que la droite indéfinie X′X nous offre celle de toutes les grandeurs de l'Algèbre, positives ou négatives. Et ce n'est pas de l'Algèbre qu'elles sont sorties, ces quantités négatives : elles appartiennent à la nature même des choses, elles sont soumises aux mêmes règles d'opérations que les quantités arithmétiques ; et par suite, il n'est pas étonnant que l'Algèbre, traduisant les propriétés des unes, s'applique aux autres. Cette unique remarque dissipe toutes les obscurités qu'on s'est plu à déverser sur la théorie des quantités négatives et démontre intuitivement ce théorème général : « Si une quantité concrète, par sa nature, peut avoir deux sens différents et opposés (comme une échelle thermométrique, un débit ou un crédit, un temps compté dans l'avenir ou dans le passé, etc...), cette quantité étant soumise au calcul algébrique, tout résultat algébrique positif ou négatif, obtenu comme solution, exprimera une valeur de la quantité dont il s'agit, en grandeur et en sens, l'expression algébrique ayant une grandeur et un signe ».

Cette simple indication est suffisante pour donner une idée première de la théorie des quantités négatives, qui trouvent ainsi leur représentation sur la demi-

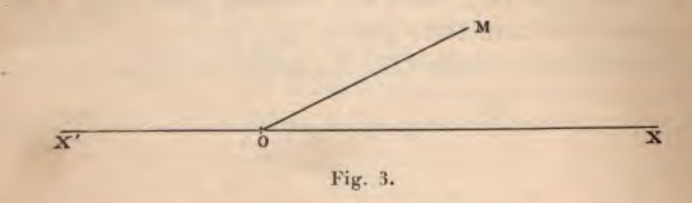


Fig. 3.

droite OX′. N'était-il pas naturel, dès lors, de chercher à sortir de ce domaine étroit, la ligne droite, où les quantités algébriques positives ou négatives sont en quelque sorte emprisonnées, et de se demander si, par des symboles convenables, on ne pourrait pas représenter les faits géométriques qui se passent sur un plan ?

Il faudrait pour cela (fig. 3) représenter un segment *incliné* OM, partant de l'origine O pour aboutir à un point quelconque, par une notation spéciale, puis étendre à ces segments les opérations élémentaires de l'Arithmétique et de l'Algèbre. En suivant cette voie, on arrive à édifier une méthode de calcul dont les règles sont exactement celles de l'Algèbre; les nouvelles quantités représentant les segments inclinés sont, non pas analogues, mais identiques aux expressions dites *imaginaires*. Ce n'est pas précisément ainsi que l'on a procédé en réalité. Les imaginaires, sorties de la résolution des équations du second degré, ont été prises pour un produit pur de l'Algèbre, et on a versé des flots d'encre pour en élucider la nature, même après les beaux travaux de Cauchy sur les quantités géométriques. C'est à peine si l'on commence timidement aujourd'hui à donner un coup d'œil en passant à l'admirable méthode des *équipollences*, aussi remarquable par sa fécondité que par sa conception fondamentale, et qui est due à l'un des plus profonds géomètres dont l'Italie ait pu s'honorer, Giusto Bellavitis. Cette méthode n'est autre qu'un calcul géométrique, identique à celui de l'Algèbre, et traduisant, comme nous venons de le dire, les faits géométriques du plan tout entier.

C'est à un illustre astronome et géomètre de la Grande-Bretagne, Hamilton, qu'est due l'idée de créer un calcul s'appliquant aux faits géométriques de l'espace, et non plus seulement à ceux du plan. De là sa méthode des *quaternions*, pratiquée avec tant d'avantages par les savants anglais depuis bien des années, et qui pénètre à peine et difficilement en France. Mais ici, en raison de la nature même des choses, les règles de calcul à appliquer ne sont plus exactement celles de l'Algèbre ordinaire. Elles subissent des modifications profondes, parmi lesquelles la plus importante consiste dans l'impossibilité d'intervertir les deux facteurs d'un produit, sans altérer ce produit lui-même.

Une méthode d'une extrême puissance, celle de Grassmann, forme en quelque sorte la synthèse, le lien commun entre celles dont nous venons de parler, et présente des ressources considérables, permettant de résoudre parfois très simplement des questions difficiles. Elle mériterait d'être plus généralement connue qu'elle ne l'est encore.

On voit la gradation : sur une semi-droite, domaine de l'Arithmétique, représentation des quantités positives; sur la droite entière, domaine de l'Algèbre, des quantités réelles, positives ou négatives; sur le plan, domaine des équipollences, où se trouvent représentées les quantités dites imaginaires, et qui sont cependant tout aussi réelles que les autres; dans l'espace, domaine des quaternions, avec leur Algèbre spéciale; toutes ces méthodes venant se fondre dans celle de Grassmann.

Mais ce n'est pas seulement aux faits géométriques que le calcul peut s'appliquer. Dès que des éléments d'une nature quelconque, mais comparables et mesurables, peuvent être représentés par des symboles spéciaux; dès que les relations entre ces éléments peuvent être exprimées par des signes particuliers d'opérations sur ces symboles, on a par cela même créé une Algèbre nouvelle. Cette conception nous porte bien au delà du domaine étroit de l'Algèbre ordinaire. Nous nous bornerons à en citer deux exemples, deux tentatives plutôt, qui auraient mérité peut-être d'attirer d'une façon plus particulière l'attention des savants : les essais d'application d'un symbolisme systématique aux faits de la logique, dont l'expression la plus caractéristique se trouve dans les *Lois de la pensée*, de Boole; puis, le *Calcul des opérations chimiques*, de Brodie. Il faudrait peut-être rattacher encore à cette Algèbre générale l'application, si souvent essayée, de la méthode et de la langue mathématiques aux phénomènes sociologiques, économiques ou démographiques. Enfin, il serait injuste

de n'y pas faire rentrer les travaux si intéressants entrepris depuis plusieurs années, en Italie, par M. G. Peano et quelques-uns de ses disciples, sous le titre de *Logique mathématique*. C'est la mise à exécution, sous une forme peut-être perfectible encore, d'une idée dont Leibniz semble avoir jeté le premier germe. Cela porte à penser que ce grand esprit comprenait l'Algèbre autrement qu'on ne l'a fait souvent depuis. Il ne lui attribuait pas une puissance de création et de généralisation qu'elle ne peut avoir, mais il voyait dans les principes mêmes dont elle découle la possibilité d'édifier une langue écrite, pouvant exprimer rigoureusement et simplement les faits et les relations qu'ils ont entre eux, dans des ordres d'idées très divers.

CHAPITRE IV

Le Calcul infinitésimal.

Importance historique. — La découverte du Calcul infinitésimal est peut-être le fait le plus considérable qui se soit jamais produit dans l'histoire de la science mathématique. Ce fut une véritable révolution : à partir de ce moment, les applications se succédèrent avec une rapidité et une fécondité surprenantes ; les problèmes réputés les plus difficiles furent abordés, et parfois résolus avec une merveilleuse facilité. L'instrument nouveau mis à la disposition de la science paraissait tenir du prodige, être une sorte de clef magique destinée à ouvrir toutes les portes et qui devait permettre de pénétrer tous les mystères de la nature.

A qui l'humanité doit-elle reporter la gloire de cet immense progrès ? On sait quelle lutte passionnée fut la conséquence de cette question, entre les disciples de Newton et de Leibniz. Depuis lors, des travaux historiques relativement récents permettent de faire remonter jusqu'à notre grand Fermat l'honneur de la première conception du Calcul infinitésimal ; mais ces questions de prédominance ou de priorité, au profit de telle personnalité ou de telle nation, n'ont plus guère aujourd'hui qu'un intérêt de simple curiosité. Ce qu'il faut constater surtout, c'est que la découverte était à l'état d'incubation, comme il arrive souvent dans toute

science ; les procédés des anciens, les ressources de l'Algèbre moderne créée par Viète ne suffisaient plus pour aborder quelques-uns des plus importants problèmes de la nature. Les moyens nouveaux dont le génie mathématique de quelques hommes vint enrichir la science étaient devenus en quelque sorte une nécessité. Il n'est pas à regretter que cette illumination se soit produite simultanément ou à peu près sur plusieurs points du monde et sous des apparences diverses. Il eût été beaucoup plus difficile sans cela de dégager le véritable caractère philosophique du nouveau calcul, ce à quoi nous sommes à peine arrivés à l'heure présente.

Analyse transcendante. — Cette branche de la science mathématique a reçu des dénominations diverses, parmi lesquelles celle d'*Analyse transcendante*, opposée à *Analyse algébrique*, a longtemps prévalu. Aujourd'hui encore, le terme d'*Analyse* paraît être en faveur, puisque plusieurs des chaires les plus importantes de Calcul infinitésimal sont ainsi qualifiées. On remarquera que nous avons évité ce vocable en tête du présent chapitre : sans attacher aux mots plus d'importance qu'il ne convient, il est permis cependant de regretter l'usage abusif de ceux qui peuvent entraîner à leur suite des idées fausses, et nous croyons que c'est ici le cas.

L'analyse et la synthèse sont deux grandes méthodes, opposées l'une à l'autre, et qui se retrouvent dans toutes les recherches scientifiques. Qu'il s'agisse de logique pure, de Chimie ou de faits mathématiques, on fait de l'analyse quand on décompose une question en éléments plus simples, pour arriver ainsi, par une sorte de réduction poussée aux dernières limites, jusqu'à la solution complète, obtenue par un procédé systématique et méthodique, qui conduit au résultat par une voie, pénible peut-être, mais sûre. On fait au contraire de la synthèse, quand on construit de toutes

pièces la solution, avec les matériaux qu'on possède déjà, sauf à vérifier cette solution par la méthode analytique.

Or, dans le domaine mathématique, on a complètement détourné ces termes de leur signification générale, en assimilant analyse à *Calcul* et synthèse à *Géométrie*. Et, s'il est vrai qu'en soumettant les questions au calcul on suit le plus souvent une marche analytique, le contraire se présente aussi, et plus souvent qu'on ne l'imagine. On fait fréquemment du calcul synthétique, de même qu'on peut, en Géométrie pure, recourir à l'analyse sans faire le moindre calcul. Il importe donc de ne pas se laisser surprendre par l'emploi de mots en usage, mais détournés de leur signification normale.

Caractere général du Calcul infinitésimal. — Auguste Comte, grand admirateur de Lagrange, — et une telle admiration est certes justifiée, — a cru pouvoir établir une distinction nette entre l'Algèbre ordinaire et le Calcul infinitésimal, en assignant à la première l'étude des fonctions directes, et à celui-ci l'étude des fonctions indirectes. Pour pénétrer complètement le sens d'une telle distinction, il faut posséder déjà les notions fondamentales du calcul dont il s'agit. Il y a là une conception un peu artificielle, non pas fausse, mais construite après coup, de même que les théories de Lagrange ont suivi celles de Leibniz à un long intervalle. Au lieu de l'adopter *a priori*, n'est-il pas préférable de remonter à l'origine même du Calcul infinitésimal, pour en préciser nettement le caractère et la portée ?

L'étude des fonctions, nous l'avons remarqué dans le chapitre précédent, appartient en propre à l'Algèbre ; mais, dès qu'on veut serrer la question d'un peu près, dès qu'on veut examiner comment une fonction se comporte, on ne tarde pas à rencontrer des difficultés pour ainsi dire insurmontables, surtout si cette fonction présente par sa nature une assez grande complexité.

Ces difficultés, à mesure que la science mathématique progressait, se révélèrent surtout à l'occasion de ce que l'on appela le « problème des tangentes », c'est-à-dire à propos de la détermination des tangentes aux courbes en général. Lorsque Descartes eut le premier donné une définition véritablement satisfaisante de la tangente à une courbe, ce grand géomètre et d'autres, parmi lesquels nous nous bornons à citer Roberval et à rappeler Fermat, se mirent à la recherche d'une méthode générale, que Leibniz et Newton eurent enfin la gloire d'ériger en corps de doctrine. Cette origine géométrique de la plus grande découverte mathématique est bien propre à montrer une fois de plus la nécessité première des éléments concrets, même dans les branches du savoir humain qui paraissent les plus abstraites. Mais pour ne pas empiéter ici sur le domaine de la Géométrie, nous éviterons quant à présent d'y revenir.

L'idée de fonction, nous l'avons dit, est indissolublement liée à l'idée de continuité. Si une fonction d'une variable, $f(x)$, que nous désignerons par y, prend une valeur particulière b lorsqu'on donne à x une valeur particulière a, il importe de connaître les valeurs, de plus en plus voisines de b, qu'elle prendra quand x prendra des valeurs de plus en plus voisines de a. Si l'on représente par $a + \Delta a$ une valeur de x voisine de a, et par $b + \Delta b$ la valeur correspondante de y, les *accroissements* Δa et Δb de la variable et de la fonction seront évidemment liés entre eux. C'est la recherche de cette liaison qui contient en germe tout le Calcul infinitésimal.

Newton parvint à l'établir en introduisant dans cette recherche des notions mécaniques, par son calcul des *fluxions*. Il considère les vitesses des variations de x et de y ; ce sont ces vitesses qu'il désigne par « fluxions », tandis que x et y elles-mêmes sont les « fluentes ».

Leibniz, au contraire, considérant les accroissements Δa et Δb, ou Δx et Δy, comme de véritables quantités, bien que ce soient des expressions éminemment variables, ne craint pas de les faire entrer directement dans le calcul, et montre suivant quelles règles il y aura lieu de les y faire entrer. C'est la doctrine des infiniment petits, discutable et peu rigoureuse dans sa forme primitive, mais qui s'impose par la simplicité de la mise en œuvre et par la grandeur des résultats obtenus. De nos jours seulement, on est arrivé à montrer toute la rigueur des notations de Leibniz, de beaucoup les plus avantageuses, et de ses méthodes de calcul, que rien n'a pu mettre en défaut. Lagrange, bien plus tard, introduit la notion de *fonction dérivée*. On appelle ainsi, dans la notation qui précède, la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta b}{\Delta a}$ lorsque Δa diminue de plus en plus. Pour chaque valeur a donnée à x, cette dérivée a une valeur particulière. C'est donc une fonction nouvelle de x, représentée par $f'(x)$ dans le système de Lagrange.

On peut écrire ainsi

$$f'(x) = \lim. \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

tandis que Leibniz écrira

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

et désignera dy et dx sous le nom de *différentielles* de la fonction et de la variable.

Dans la notation de Newton, enfin, on aurait

$$f'(x) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$$

$\dot{y}$ et $\dot{x}$ étant les fluxions de y et de x.

Lagrange, en créant le calcul des dérivées, a remarqué surtout que toutes les fonctions analytiques étudiées

sont telles que leur accroissement, Δy par exemple, peut se mettre sous la forme suivante :

$$A_1 \Delta x + A_2 (\Delta x)^2 + \ldots\ldots,$$

et que le coefficient A_1 du premier terme est précisément la dérivée. Au fond, malgré la puissance de son esprit, il n'est pas arrivé de la sorte à affranchir la Mathématique de l'idée d'infiniment petit, comme il s'en était flatté, car le développement qu'il prend comme point de départ est loin de pouvoir être admis comme un axiome. D'un autre côté, les notations des dérivées sont d'un usage si incommode, en comparaison de celles de Leibniz, que Lagrange lui-même s'est empressé de recourir à ces dernières, aussitôt qu'il a dû appliquer le calcul, et particulièrement dans sa Mécanique analytique.

Aujourd'hui, les principes se trouvant élucidés d'une façon à peu près satisfaisante, il nous est permis de voir les choses d'un peu plus haut, et de constater dans toutes ces manifestations de tant d'hommes de génie, le développement sous des formes diverses, mais non pas contraires, d'une grande pensée commune. Quant à l'emploi des notations de Leibniz, il est consacré définitivement par l'usage, et c'est justice.

On peut comprendre maintenant le sens qu'il faut attacher à l'expression de fonctions indirectes, employée par Auguste Comte. Ces fonctions indirectes ne sont autres que les dérivées, qui aideront d'une façon si heureuse à l'étude des fonctions dont elles proviennent.

A une étude compliquée, peut-être impossible, viendra se substituer une recherche relativement simple ; et, grâce aux propriétés fournies par le Calcul infinitésimal lui-même, on aura sous la main un outil propre à faire reconnaître la marche générale d'une fonction, à permettre de trouver ses maximums ou ses minimums, de savoir si cette fonction est croissante ou décroissante ; sans parler des applications géométriques si importantes et pour ainsi dire innombrables.

Dans la théorie des fonctions dérivées, $f'(x)$ étant la dérivée de $f(x)$, cette dernière fonction $f(x)$ est dite la *fonction primitive* de $f'(x)$. Dans la théorie infinitésimale de Leibniz, $f'(x)dx$ est la *différentielle* de $f(x)$. Trouver la fonction primitive d'une fonction donnée, ou la fonction qui a pour différentielle une différentielle donnée, ne constitue donc qu'un seul et même problème, d'ailleurs très difficile et à peine ébauché aujourd'hui, malgré des efforts nombreux et considérables.

Ce problème est ce que l'on a appelé dans les siècles derniers le problème inverse des tangentes, et constitue, pris dans sa généralité, ce qu'on nomme le *Calcul intégral*, tandis que la recherche des différentielles ou des dérivées fait l'objet du *Calcul différentiel*.

Telles sont les deux branches qui, réunies, forment le Calcul infinitésimal. Les applications géométriques nous permettront un peu plus loin de caractériser mieux encore et d'éclaircir plus entièrement ces notions générales sur lesquelles nous devons ici passer rapidement. Mais nous ne voudrions pas quitter ce sujet sans faire une remarque qui pourra surprendre plus d'un lecteur, tellement elle indique l'irrégularité, nous pourrions dire le caprice, qui préside aux progrès de l'esprit humain.

Le Calcul intégral passe à juste titre pour offrir des difficultés très supérieures à celles du Calcul différentiel. Ce dernier est de création relativement récente. Et cependant, si l'on veut chercher sincèrement les origines du Calcul intégral, c'est jusqu'à Archimède qu'il nous faut remonter. Lorsque cet illustre géomètre déterminait l'aire d'une parabole ou le volume du paraboloïde, il faisait du Calcul intégral bien des siècles avant que le mot ne fût inventé. Les méthodes employées par lui ne différaient pas sensiblement, quant au fond des idées, de celles qui sont encore en usage. Il y a plus : la simple détermination classique du volume du tétraèdre, enseignée aujourd'hui dans nos classes les plus élémen-

taires, est un problème de Calcul intégral; ce problème est *identiquement* le même que celui de l'aire de la parabole. Peu de professeurs s'en doutent, et pas un élève ne le devinerait de lui-même. C'est un fait, entre mille, qui nous montre combien il y aurait de réformes et d'améliorations à apporter dans l'enseignement mathématique.

Divisions du Calcul différentiel. — L'objet principal du Calcul différentiel est, d'après ce qui précède, la détermination des dérivées, et par conséquent des différentielles des diverses fonctions mathématiques. Ce seul problème comprend tout un ensemble de règles obtenues d'après la définition première, et qui s'appliquent aux fonctions élémentaires, algébriques ou transcendantes, à leurs diverses combinaisons, et aussi, ce qui est d'une grande importance, aux fonctions implicites, que nous avons définies plus haut.

Ce n'est pas tout. De la définition de la dérivée découle celle des dérivées des divers ordres ; la dérivée de $f'(x)$ par exemple, étant la dérivée seconde de $f(x)$, que nous désignerons par $f''(x)$ et ainsi de suite. Comme conséquence correspondante, nous aurons la formation des différentielles des divers ordres, exprimables par les notations de Leibniz. Toutes ces déterminations formeront autant de chapitres du Calcul différentiel.

Mais les fonctions d'une seule variable ne sont qu'un cas très particulier; de même qu'en Algèbre, on devra examiner les fonctions de plusieurs variables, et l'on étudiera les diverses dérivées de ces fonctions, considérées comme dépendant d'une seule variable, les autres restant provisoirement constantes, ou bien considérer le cas où toutes les variables changent à la fois de valeur. Cela donne naissance aux *dérivées partielles* d'une part, et de l'autre aux différentielles totales.

Enfin, il est une branche du Calcul différentiel, fort importante en elle-même et surtout au point de vue des

applications. C'est celle qu'on désigne sous le nom de changement de variables, et qui peut se résumer dans l'énoncé suivant : certaines fonctions de x, y, z,... étant données, quelle que soit d'ailleurs la nature de ces fonctions, en trouver les dérivées ou les différentielles des divers ordres en prenant pour variables nouvelles x_1, y_1, z_1,... qui sont liées aux anciennes par des relations connues. Ce problème peut donner lieu à des opérations de calcul longues et pénibles dans certains cas particuliers, mais la théorie en est achevée d'une façon aussi parfaite qu'on le puisse désirer.

Une doctrine complète du Calcul différentiel comprend nécessairement aussi les applications de ce calcul à l'étude des fonctions elles-mêmes, c'est-à-dire les variations des fonctions, les déterminations des maximums et des minimums, et enfin les développements des fonctions en séries.

Ce dernier point a été volontairement passé par nous sous silence dans le chapitre précédent, bien qu'on l'incorpore volontiers dans l'algèbre. Nous nous bornerons ici à l'indiquer rapidement en quelques mots; il nous paraît du reste appartenir essentiellement par sa nature au domaine infinitésimal. Si l'on a une suite *indéfinie* de termes

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3 \dots \quad u_n \dots$$

telle que chacun d'eux soit une fonction de son rang n, cette suite forme ce qu'on appelle une série. La série est convergente si la somme

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

elle-même fonction de n, tend vers une valeur finie bien déterminée à mesure que n augmente indéfiniment. Or s'il est possible de mettre la fonction $f(x)$ sous forme d'une série convergente, soit développée suivant les puissances de la variable, soit autre,

$$f(x) = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots,$$

on comprend, même au point de vue des applications pratiques, l'intérêt que présentera ce développement en ce qui touche le calcul numérique approximatif de la fonction. Un seul exemple nous le fera comprendre. Le cosinus d'un angle x, développé en série, peut s'écrire

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \dots$$

Si x est un angle très petit, la valeur $1 - \frac{x^2}{2}$ limitée aux deux premiers termes, et d'un calcul tout à fait simple, sera entachée d'une erreur extrêmement faible, et dont on connaîtra dans tous les cas une limite supérieure.

Il va sans dire qu'au point de vue théorique pur, cette question des développements des fonctions en séries n'est pas d'une moindre importance.

Formation des équations différentielles. — On appelle équation différentielle une équation dans laquelle entrent une ou plusieurs fonctions inconnues, les variables dont elles dépendent et leurs dérivées ou différentielles de divers ordres. Pour comprendre l'importance d'une telle notion, le mieux est d'invoquer un exemple simple.

Considérons la fonction implicite y de la variable x définie par l'équation $y^2 - 2px - q = 0$. En appelant y' la dérivée de y, suivant la notation de Lagrange, ou dy et dx les différentielles de y et de x, suivant Leibniz, les règles les plus simples du Calcul différentiel montrent qu'on obtient

$$yy' = p \qquad \text{ou} \qquad ydy = pdx$$

Voilà donc une relation qui conviendra à toutes les fonctions y définies par l'équation $y^2 - 2px - q = 0$, quel que soit q. Mais on a encore

$$y' + yy'' = 0, \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

et cette dernière relation est une équation différentielle qui sera aussi vérifiée par toute fonction y définie plus haut, quelles que soient les valeurs de p et de q.

Chacune de ces équations différentielles caractérise donc une famille de fonctions différentes les unes des autres, mais offrant entre elles des analogies et des rapprochements. L'étude d'une équation différentielle peut donc permettre de découvrir des propriétés communes à toutes les fonctions qui la vérifient. D'un autre côté, la mise en équation des problèmes de la nature accessibles aux méthodes mathématiques conduit invariablement, en Mécanique, en Astronomie, en Physique, à des équations différentielles. Remonter de ces équations différentielles aux fonctions, ou, pour employer le langage courant, intégrer les équations différentielles, serait donc résoudre entièrement les problèmes de Mathématique appliquée, et pénétrer les secrets de la nature dans la mesure où nous le permet l'ensemble des procédés d'observation et de mesure. Malheureusement, c'est là le chapitre le plus difficile et le moins avancé du Calcul infinitésimal.

Calcul intégral. — Les explications rapides qui précèdent étaient nécessaires pour faire comprendre la division du Calcul intégral en deux grands chapitres: intégration des différentielles, intégration des équations différentielles.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, lorsque la fonction $f(x)$ a pour dérivée $f'(x)$, et par suite pour différentielle $f'(x)\,dx$, on dit que $f(x)$ est l'*intégrale* de $f'(x)\,dx$, et l'on écrit

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

Réciproquement, si l'on donne la différentielle $\varphi(x)\,dx$, on aura

$$\mathrm{F}(x) = \int \varphi(x)\,dx,$$

et $\varphi(x)$ est la dérivée de $F(x)$. Trouver la fonction primitive de $\varphi(x)$ ou intégrer $\varphi(x)\,dx$ constitue donc un seul problème. C'est celui qui, pris dans toute sa généralité et dans toute son extension, fait l'objet de la première partie du Calcul intégral.

Longtemps bornée à des catalogues de fonctions et à quelques procédés particuliers, cette branche du Calcul infinitésimal s'est progressivement enrichie de méthodes plus rationnelles. Mais il s'en faut encore qu'on soit en possession d'instruments satisfaisants, d'un usage assez général. Il faut reconnaître cependant qu'en ce qui concerne les applications, et grâce aux méthodes de calcul approximatives, on ne se trouve pas habituellement trop entravé.

On ne saurait en dire autant lorsqu'il s'agit de l'intégration des équations différentielles, c'est-à-dire de la détermination des fonctions ou des classes de fonctions qui satisfont à une équation différentielle donnée. Dans quelques cas très particuliers seulement, ce problème d'une si haute importance a pu être résolu.

Les traités classiques de Calcul intégral contiennent de volumineux développements et de nombreux chapitres sur l'intégration des équations différentielles. Chaque année, c'est par centaines, même par milliers, que sont publiés, dans le monde entier, des travaux sur ce sujet. Et cependant, la partie de la science dont il s'agit, si elle ne demeure pas stationnaire, n'avance du moins qu'à pas bien lents. C'est vrai surtout en ce qui touche les équations aux dérivées partielles dont l'importance serait cependant si grande pour les applications. Cela tendrait à faire croire que certaines des difficultés contre lesquelles on vient se heurter sont d'une nature intrinsèque, si l'on peut ainsi parler, inhérentes au sujet lui-même, et presque insurmontables à l'homme, jusqu'au jour où, par une révolution comparable à l'invention du Calcul infinitésimal, quelque instrument

nouveau sera mis au service de l'intelligence humaine et viendra soulager son infirmité.

Intégrales définies. — Une exposition, même rapide et sommaire, des caractères essentiels du Calcul infinitésimal ne saurait être complète sans mentionner au moins les intégrales définies. Leur détermination, en effet, ne comporte pas une intégration dans le sens philosophique du mot ; mais elles sont dans les applications d'une importance extrême, et de plus, elles fournissent à la Mathématique la définition de nouvelles fonctions, de symboles qui peuvent devenir de précieux instruments pour des recherches théoriques ultérieures. Les fonctions eulériennes en sont un exemple ; de même les intégrales elliptiques, sur lesquelles nous aurons à revenir dans le chapitre suivant. Enfin, pour rester dans un domaine plus élémentaire, c'est dans la notion de l'intégrale définie qu'on doit chercher la véritable origine des logarithmes.

Lorsqu'une fonction $f(x)$ dépend d'une seule variable, si l'on donne à cette variable x toutes les valeurs comprises entre deux nombres a et b, on peut supposer que cet intervalle de a à b ait été partagé en n parties, d'une façon quelconque, par des valeurs intermédiaires $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Dès lors, si l'on forme les quantités

$$f(a)(a_1 - a), f(a_1)(a_2 - a_1), \ldots f(a_{n-1})(b - a_{n-1})$$

et qu'on en fasse la somme, on démontre que la limite de cette somme, lorsque le nombre n des divisions augmente indéfiniment, tend vers une certaine valeur qu'on représente ainsi

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

et que cette valeur est précisément $F(b) - F(a)$, si $F(x)$ est l'intégrale de $f(x)\,dx$, c'est-à-dire si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$. C'est ce qu'on appelle l'inté-

grale définie de $f(x)\,dx$ entre les limites a et b ou de a à b. Cette intégrale n'est plus une fonction de x, mais seulement des limites a et b. On saura la déterminer numériquement si l'on a pu déterminer la fonction $F(x)$ elle-même. En outre, si à la place de a on a mis une valeur fixe, zéro par exemple, l'intégrale ne sera plus qu'une fonction de b.

Ce qui est important dans les applications, c'est qu'il sera le plus souvent possible de déterminer l'intégrale définie lors même qu'on ne connaîtrait pas la forme algébrique de la fonction $F(x)$; les développements en série sont à cet égard une précieuse ressource, et permettent d'aborder ainsi des questions qui ont plus d'une analogie, comme le fait justement remarquer Auguste Comte, avec la résolution numérique des équations.

Calcul des variations. — L'un des problèmes qui préoccupèrent le plus les mathématiciens, dans les deux derniers siècles, fut celui des *isopérimètres*. Le mot est trop particulier, et vicieux par conséquent, mais il a le mérite de rappeler, sous une forme assez simple, l'origine géométrique des questions dont il s'agit. En voici le type : quelles sont, parmi toutes les courbes de même longueur tracées entre deux points donnés, celles dont l'aire est un maximum ou un minimum ?

Dans toute son extension, le problème consiste dans la détermination de la forme d'une fonction inconnue pour qu'une certaine intégrale définie, dépendant de cette fonction, ait une valeur maximum ou minimum entre des limites assignées.

Les exemples de problèmes de cette nature furent variés à l'infini, et des dépenses prodigieuses d'ingéniosité et d'habileté furent faites par de grands géomètres, jusqu'au jour où Lagrange vint en apporter une solution entièrement générale, par la création du Calcul des variations. Nous ne pouvons songer à en exposer ici les principes, mais il est bon de mettre en relief

l'idée de génie qui l'a inspiré. Elle consiste dans la considération de différentiations nouvelles, auxquelles il applique la caractéristique particulière δ, et qui résultent, non plus des accroissements des variables, mais d'une modification infiniment petite dans la forme de la fonction. A ces différentielles spéciales, Lagrange donne le nom de variations. Il institue sur les variations tout un ensemble de règles de calcul qui permettent de les soumettre aux mêmes opérations que les différentielles et de les combiner avec ces dernières. Dès lors, les problèmes considérés sont ramenés à des questions ordinaires de maximum ou de minimum.

Du jour où fut créée cette branche nouvelle et si intéressante du Calcul infinitésimal, on cessa d'inventer comme à plaisir des exemples de problèmes d'isopérimètres, dont le principal intérêt tenait à la difficulté particulière que présentait chacun d'eux. Cet intérêt se trouvait effacé par la généralité de la méthode de Lagrange.

CHAPITRE V

La Théorie des fonctions.

Explication préliminaire. — Après ce que nous avons dit dans les deux derniers chapitres, plus d'un lecteur, en voyant le titre de celui-ci, aura le droit d'éprouver un certain étonnement. L'Algèbre a pour but essentiel l'étude des fonctions ; le Calcul infinitésimal introduit dans cette étude des moyens nouveaux d'investigation et de démonstration. Ne semble-t-il pas que tout doive se borner là, et qu'il n'y ait plus place pour une doctrine nouvelle ?

Penser qu'il en est ainsi, cependant, serait méconnaître la plus grande et la plus belle part, peut-être, de l'œuvre mathématique du XIXe siècle. A cette partie de la science s'attachent les noms de Legendre, Abel, Jacobi, Cauchy, Riemann, Weierstrass, Halphen et de MM. Mittag-Leffler, Fuchs, Klein, Schwarz, Sophus Lie, Picard, Poincaré, pour ne citer que les plus fameux. A l'heure présente, c'est peut-être dans cette direction que se poursuivent les plus importants travaux mathématiques parmi les géomètres contemporains.

Origine de la Théorie des fonctions. — Lorsque après la découverte du Calcul infinitésimal, on se mit à l'œuvre pour aborder l'intégration des expressions algébriques, il fallut bientôt reconnaître que certaines

intégrations de cette nature, simples en apparence cependant, présentaient une difficulté insurmontable et résistaient à tous les efforts. On s'était habitué jusqu'alors à ne guère considérer d'autres fonctions que celles qui pouvaient s'exprimer par les signes ordinaires de l'Algèbre; et l'obstacle contre lequel on venait se heurter démontrait jusqu'à l'évidence que cette conception de l'idée de fonction devait être étendue. Les intégrales nouvelles qu'on n'arrivait pas à déterminer n'en constituaient pas moins de véritables fonctions transcendantes nouvelles. Quelques-unes de ces transcendantes se présentèrent à l'occasion de la détermination de la longueur d'un arc d'ellipse, ce qui leur valut, ainsi qu'à d'autres intégrales analogues, la désignation d'*intégrales elliptiques*. A ces intégrales, au nombre de trois, furent ramenées toutes les intégrations d'expressions contenant la racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième degré. C'est à ces intégrales que Legendre, avec une admirable patience, consacra une grande partie de sa vie; mais malgré l'importance de ses travaux, il en méconnut le caractère essentiel.

Pour élucider la question, il était nécessaire de considérer les inverses des intégrales elliptiques, car ce sont ces fonctions inverses qui offrent en réalité des propriétés caractéristiques. Mais toute la foule des vérités mathématiques qui devaient sortir de là exigeait d'autre part l'extension des opérations du calcul aux quantités dites imaginaires. C'est l'un des principaux titres de gloire de Cauchy d'avoir jeté sur cette dernière question de véritables flots de lumière; antérieurement, Jacobi avait fait ressortir les principales propriétés des nouvelles fonctions, et surtout leur double périodicité.

Cette notion de la double périodicité joue dans cette théorie un si grand rôle qu'il nous semble intéressant de faire comprendre en gros quelle en est l'essence. Lorsqu'une fonction $f(x)$ est telle qu'elle reprend des

valeurs pareilles pour des valeurs de x qui diffèrent entre elles d'une quantité déterminée, si bien que l'on a

$$f(x) = f(x+d) = f(x+2d) = \dots = f(x-d) = f(x-2d) = \dots$$

quel que soit x, on dit que la fonction $f(x)$ est *périodique*, et que la *période* est d. Par exemple, toutes les fonctions circulaires de la Trigonométrie sont périodiques, par leur définition même.

Lorsqu'on étend aux imaginaires la notion de fonction, on peut, comme nous l'avons précédemment indiqué, représenter par une droite limitée OX la variable x. A chaque position de X sur le plan correspondra une

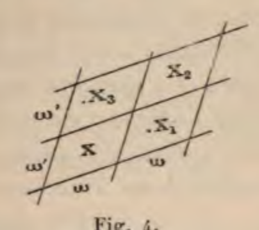


Fig. 4.

valeur y de la fonction $f(x)$, valeur en général imaginaire et représentable par OY. Le point X, au lieu de se déplacer sur une droite, doit varier dans tout le plan lorsqu'on donne à la variable x toutes les valeurs possibles. Or, si l'on a tracé sur ce plan un réseau de parallélogrammes tous pareils et si le point X vient en X_1, X_2, X_3,... occuper des positions semblables dans les divers parallélogrammes, il peut arriver que la fonction $f(x)$ reprenne chaque fois exactement la même valeur. On dit alors qu'elle est *doublement périodique*. Les deux *périodes* sont les quantités imaginaires ω, ω' représentées par les deux côtés du parallélogramme, et il est clair qu'on a

$$f(x) = f(x + n\omega + n'\omega')$$

n et n' étant deux nombres entiers quelconques.

Les fonctions elliptiques, c'est-à-dire les fonctions inverses des intégrales elliptiques, jouissent de cette propriété qui est absolument fondamentale, et qui n'aurait jamais pu s'établir sans l'introduction des imaginaires dans le calcul. Ces fonctions se rencontrent à tout instant dans les questions de Mécanique ou de Physique. Elles permettent d'exprimer des intégrales impossibles sans ce secours nouveau, et on comprend même qu'elles rendent praticable l'évaluation numérique de ces intégrales, si des tables en ont été préalablement dressées. Mais pour l'instant, c'est leur intérêt théorique qui nous semble principalement digne de retenir et de fixer l'attention du lecteur.

Il est permis de se demander si la pénétration de la méthode des quaternions n'est pas appelée dans l'avenir à étendre encore les notions dont nous venons de parler, et à devenir l'origine de nouveaux progrès. La représentation des quantités dans l'espace nous fait entrevoir la possibilité de fonctions triplement périodiques, de même que la double périodicité est née de l'introduction des imaginaires. Mais ce ne sont là que des conjectures sur un avenir peut-être encore bien lointain.

Classification des fonctions. — Les fonctions elliptiques, nous venons de le voir, donnèrent à l'idée de fonction une généralisation extrême. Les études qui se poursuivirent ensuite conduisirent les auteurs à distinguer, d'après telles ou telles de leurs propriétés, les fonctions en familles de plus en plus nombreuses ; il y eut même un luxe de dénominations dont il ne convient pas de se féliciter, car c'est à peine si l'on s'y reconnaît encore aujourd'hui, des expressions différentes servant souvent à désigner des choses identiques.

Cependant un certain ordre a commencé à s'établir, et, la première période d'enfantement passée, le chaos est devenu progressivement moins obscur. Il en a été

de même des notations, primitivement peu ordonnées, pas toujours rationnelles, et qui ont ajouté aux grandes difficultés que le sujet comportait par lui-même. Nous n'essaierons même pas ici de rappeler quelques-unes des dénominations employées. Mais ce que nous voulons retenir, c'est une idée générale, qui consiste essentiellement à classer une fonction par ses *singularités*; on appelle ainsi, d'une façon générale, toutes les valeurs dans le voisinage desquelles il se produit un fait exceptionnel; cette notion mathématique emprunte beaucoup à la Géométrie, à l'exemple d'un grand nombre d'autres. Ce sont ces singularités qui, par leur nature et leur distribution, fournissent les éléments d'une classification rationnelle; à chaque famille de fonctions correspondent certaines singularités, toujours les mêmes, qui caractérisent cette famille. Cette classification semble avoir contribué dans une très large mesure aux progrès de la Théorie des fonctions.

Étude des fonctions. — Dans l'ordre d'idées que nous cherchons à exposer, ou plutôt simplement à faire comprendre d'une manière générale, les fonctions ne sauraient s'étudier, comme on le fait en Algèbre, sur les symboles dont on se sert pour les représenter, puisque ces symboles n'existent plus. Elles sont définies, comme nous venons de le dire, par leurs singularités, et ces singularités sont elles-mêmes révélées par l'examen des équations différentielles correspondantes. Le nombre des propositions générales sur les fonctions ainsi définies, sur leurs relations et leurs propriétés respectives, est devenu très grand, et quelques-unes de ces propositions, en raison de leur généralité, présentent une importance de premier ordre. C'est tout un monde nouveau qui se révèle, et dont les plus illustres géomètres des siècles précédents ne pouvaient même avoir la pensée. Le calcul n'intervient plus à la manière habituelle, il ne se met pas au service du raisonnement,

pour le soulager et le suppléer au besoin, en triturant, suivant des règles bien établies, des symboles dont la signification est précise. Il faut — et c'est la plus grande difficulté de cette branche de la Mathématique — attaquer ici les problèmes en eux-mêmes, pénétrer jusqu'au fond la nature des choses, remonter aux origines et aux définitions, et n'avoir recours au calcul, dans le sens habituel du mot, qu'à titre d'instrument accessoire, bien qu'il présente souvent par lui-même de très grandes difficultés.

Cette méthode d'étude des fonctions sur les équations différentielles auxquelles elles satisfont devait avoir par contre-coup, comme conséquence, une influence considérable sur la théorie des équations différentielles elles-mêmes et sur leur intégration. Il n'y a pas lieu, dans le sens moderne, et en se plaçant au point de vue de la Théorie des fonctions, d'attribuer à ce mot d'intégration une signification identique à celle qu'il avait dans le Calcul infinitésimal ordinaire. C'est ce que M. Painlevé, par exemple, a très nettement fait ressortir dans ses remarquables *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*. Une intégrale est *uniforme* lorsqu'elle n'admet qu'une seule détermination. Or, — nous citons ici M. Painlevé — « dans ces dernières années, grâce surtout aux travaux de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler, la représentation des fonctions uniformes a fait de tels progrès qu'il sera toujours possible, si l'intégrale est uniforme, de la définir et de la suivre dans tout son domaine d'existence, à l'aide d'un développement unique, et c'est en cela précisément que consiste l'intégration entendue dans son sens le plus large ».

Cela explique et justifie cette remarque du même auteur, placée dès le début de ses *Leçons* : « Une équation dont l'intégrale est uniforme doit être regardée comme intégrée au sens moderne de ce mot ».

Il semble au premier coup d'œil que des spéculations

aussi purement théoriques nous éloignent bien de la conception générale ordinaire de la Mathématique, et soient en contradiction avec la possibilité de se servir des instruments dont il s'agit au point de vue des applications.

On affirme cependant (et, je le crois, avec raison) que certaines des fonctions nouvelles dont il s'agit, et notamment les fonctions elliptiques dont nous avons dit quelques mots au début de ce chapitre, sont de nature à rendre des services importants, non seulement à ceux qui cultivent la science pure, mais même à ceux qui l'appliquent, comme les ingénieurs, par exemple.

Il est facile de faire tomber cette apparente contradiction, si l'on veut bien y réfléchir et regarder les choses d'un peu près. Pour qu'un problème quelconque soit utilisable au point de vue pratique, il suffit que les résultats en puissent être traduits en nombres, dans chaque cas particulier, avec une approximation déterminée, qui corresponde aux nécessités de la question elle-même et aux erreurs que nous commettons nécessairement dans nos observations, nos expériences et nos mesures. Dès lors, si une expression, dont nous n'avons pas la notion par un symbole particulier, peut être obtenue par un développement en série, la faculté de calculer cette expression avec telle approximation que nous pouvons désirer s'ensuit nécessairement.

La tâche du mathématicien pur est terminée, quand il a indiqué de la sorte comment *on pourrait* trouver la solution; le reste n'est plus qu'une question d'Arithmétique, plus ou moins pénible, qu'on pourra faciliter par la construction préalable de tables, ou par des artifices plus ou moins ingénieux.

A voir de près les choses, n'en est-il pas de même pour les fonctions les plus élémentaires, pour les lignes trigonométriques ou les logarithmes, par exemple ? Lorsqu'un résultat est exprimé par une formule contenant de telles fonctions, est-ce autre chose qu'une indi-

cation de calculs à faire, et de calculs approchés? Et néanmoins tous les ingénieurs, tous les praticiens ayant besoin d'appliquer la Mathématique hésitent-ils à se servir d'un sinus ou d'un cosinus, ou à ouvrir une table de logarithmes?

En cette matière, comme en beaucoup d'autres, les habitudes prises jouent un grand rôle; mais il est à présumer que, dans un avenir qui n'est pas bien éloigné, les résultats de la Théorie des fonctions pénétreront dans les applications elles-mêmes et y rendront d'éclatants services.

L'Interpolation. — C'est avec intention que j'ai tenu à incorporer ce sujet dans le présent chapitre, bien qu'il n'ait pas un rapport direct avec les développements qui précèdent. Habituellement, le problème de l'interpolation est traité, ou plutôt effleuré dans les cours d'Algèbre, où il semble tenir une place accessoire. Dans les limites étroites où d'habitude on l'enserre, il est assez naturel d'en agir ainsi. Mais la portée du problème général de l'interpolation est à mon avis bien plus étendue; à cause du rôle que joue cette question dans la Mathématique appliquée, elle constitue l'un des plus intéressants chapitres de la philosophie naturelle. En raison de cette importance, elle prend un caractère très général qui mérite qu'on lui fasse une place à part, même dans le domaine de la Mathématique pure. Ce caractère de l'interpolation paraît avoir été quelque peu méconnu, puisque, même à l'heure actuelle, on a mutilé sur ce point certains programmes d'examens à un degré que rien n'excuse. Nous reviendrons s'il y a lieu sur ce point spécial en parlant de l'enseignement mathématique; pour l'instant, nous voulons simplement tirer argument de ce délaissement injustifiable, en faveur de la nécessité d'une explication un peu développée.

Lorsqu'on entreprend d'étudier une loi naturelle quelconque, une relation de cause à effet, il s'agit en

général de savoir comment varie une grandeur lorsque certaines autres grandeurs sont elles-mêmes variables. Autrement dit, les lois sont exprimées par des fonctions naturelles, et l'application de la Mathématique doit avoir pour objet final de transformer ces fonctions naturelles en fonctions mathématiques.

Nous supposerons tout d'abord, pour plus de simplicité, qu'il s'agisse d'une seule variable indépendante. Dans certains cas, des considérations *a priori*, des hypothèses plausibles ou des notions antérieurement acquises peuvent permettre de formuler la loi dont il s'agit; et dès lors l'expérience n'a plus à intervenir qu'à titre de vérification, si cette loi est vraie. Mais dans bien d'autres circonstances, en Météorologie, par exemple, où les considérations purement théoriques sont perpétuellement en défaut dans l'état présent de cette science, il est manifestement impossible de procéder comme nous venons de le dire. Tout au contraire, il faut mettre les faits, c'est-à-dire l'expérience, à la base de la science, enregistrer ces faits avec les mesures qu'ils comportent, et tâcher de dégager de cet amoncellement de matériaux la loi mathématique que l'on poursuit, ainsi que le fit Kepler pour les mouvements des planètes.

Mais l'expérience, en dépit de l'emploi des appareils enregistreurs, ne nous donne pas directement, avec l'approximation et la rigueur requises, les valeurs en nombre infini d'une fonction répondant à l'infinité des valeurs correspondantes de la variable dans un intervalle déterminé.

Nous ne pouvons retenir, comme présentant des garanties suffisantes, qu'un certain nombre de valeurs de la fonction inconnue $y_1, y_2, .., y_n$, correspondant à des valeurs déterminées de la variable $x_1, x_2, \ldots x_n$, chaque couple de valeurs correspondantes de x et de y représentant une expérience ou une observation.

Cela étant, le problème de l'interpolation mathéma

tique consiste à trouver une fonction $f(x)$ qui prenne les valeurs données de y pour les valeurs correspondantes de x.

Par sa nature même, ce problème est essentiellement indéterminé, ce que l'on comprend instinctivement si l'on remarque qu'il se réduit à celui-ci : tracer une ligne qui passe par n points donnés. Le nombre des solutions est infini ; mais avec quelques conditions imposées, il est possible d'en faire une question ne comportant plus qu'une solution unique. Si, par exemple, on s'impose la condition que $f(x)$ sera un polynome entier en x, et que le degré de ce polynome sera au plus égal à n, Lagrange a donné une formule, très symétrique et fort remarquable, qui constitue la solution désirée. A Newton on en doit une autre, également fort intéressante, et qui résout le même problème dans le cas particulier où toutes les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ de la variable indépendante se succèdent en progression par différence.

Mais de telles solutions particularisent à un degré extrême un problème tout à fait général par sa nature ; Cauchy, qui s'est également occupé de cette question, a montré comment on pouvait aussi interpoler par l'emploi d'une fraction algébrique, et non plus d'un polynome ; en outre, quelques études sur ce sujet ont eu pour résultat de faire voir comment il était possible d'employer pour cet objet une forme de fonction dont on dispose à volonté, ce qui peut présenter de sérieux avantages suivant la nature de la loi qu'on veut essayer de traduire en formule.

Il faut citer aussi Ampère, qui paraît avoir le premier, par l'emploi des fonctions qu'il a nommées *interpolaires*, indiqué comment il est possible de poursuivre une interpolation, c'est-à-dire de la modifier à mesure qu'on enregistre de nouveaux couples de valeurs de la fonction et de la variable, sans perdre le bénéfice des calculs antérieurement effectués.

Malgré tout, ce problème n'est encore qu'ébauché, et il reste beaucoup à faire pour le présenter sous une forme entièrement générale. Les conditions données peuvent fort bien ne pas consister exclusivement en valeurs correspondantes, ainsi que nous l'avons supposé. On pourrait, par exemple, assujettir la fonction y à avoir une dérivée prenant des valeurs données pour certaines valeurs de la variable, tandis que la fonction prendrait elle-même des valeurs données pour d'autres valeurs de la variable.

En outre, les valeurs enregistrées, si elles proviennent directement de l'observation des faits, étant fatalement entachées d'erreurs, il y aurait lieu d'examiner s'il ne serait pas avantageux de laisser une certaine élasticité aux formules dans les limites possibles de ces erreurs, et d'étudier les conséquences possibles de telles variations.

Il serait intéressant de ne pas borner la question, comme on le fait d'habitude, aux seules fonctions réelles de variables réelles, et de l'étendre tout au contraire aux quantités imaginaires et même peut-être aux quantités géométriques de l'espace.

Enfin, l'hypothèse d'une seule variable indépendante est tout à fait particulière, et la plupart des fonctions de la nature dépendent de plus d'une variable. La recherche des fonctions, d'une espèce quelconque, de plusieurs variables, satisfaisant à des conditions déterminées, ou ne s'écartant de ces conditions que dans des limites assignées à l'avance, laisse donc ouvert, comme on le voit, un vaste champ d'investigation aux géomètres, et pourra faire l'objet de bien des recherches nouvelles. Ce problème, sous cette forme extrêmement générale, et à cause même de cette généralité, présente des difficultés de plus d'une nature. La recherche des formes les plus simples des fonctions employées, suivant le degré d'indétermination qui subsiste, serait à elle seule d'un haut intérêt. Enfin, et en dehors de l'utilité directe, pour ainsi dire, en ce qui touche les diverses sciences

naturelles auxquelles la Mathématique peut s'appliquer, il semble qu'il y ait là une sorte de prolongement de la Théorie des fonctions. Cela justifiera, je l'espère, aux yeux du lecteur, l'insistance que j'ai apportée sur la question de l'interpolation dans les rapides considérations qui précèdent, et la place que j'ai cru devoir donner à ces considérations à la fin du présent chapitre.

CHAPITRE VI

La Géométrie.

Origine des notions géométriques. — Par l'observation des objets qui nous entourent, nous arrivons à la conception de l'espace dans lequel nous vivons et dans lequel ces objets occupent une certaine étendue. Nous constatons en même temps qu'ils présentent une forme. Les formes des objets sont variées à l'infini; mais, parmi elles, quelques-unes nous frappent par leur apparente régularité. Bien que cette apparence ne tienne qu'à l'imperfection de nos sens, elle entre pour une très large mesure dans les impressions ressenties par nous, et les dispositions régulières dont nous parlons prennent dans notre cerveau une existence qui se manifeste avec une intensité puissante. Là, comme toujours, nous avons fait de l'abstraction, inconsciente ou voulue, et l'abstraction est venue prendre la place de la réalité naturelle qui l'a provoquée. De même que les abstractions sur les collections sont la base première des notions arithmétiques, les abstractions effectuées sur les formes sont l'origine de nos conceptions géométriques.

Imaginons, par exemple, un cube en marbre parfaitement poli. La forme de ce cube résulte, pour nos sens, de ce qu'il occupe une certaine position dans l'espace ; nous arrivons à séparer ainsi l'espace en deux

régions : celle qui est occupée par le cube et celle qui lui est extérieure. La limite qui sépare ces deux régions est pour nous une *surface*, la région intérieure est un *volume*, surface et volume dont nous nous faisons l'idée indépendamment du corps considéré, qui pourrait aussi bien être en verre, en bois ou en métal, tout en conservant la même forme.

Cependant, si nous y regardions de très près, nous verrions, par exemple avec un microscope d'un grossissement indéfini, que cette surface n'existe pas telle que nous la concevons, que les particules composant le corps sont distribuées, au contraire, de la façon la plus confuse ; mais la conception *surface*, répondant aux apparences premières, n'en a pas moins pris possession de notre cerveau à l'état d'abstraction.

En regardant ensuite cette surface, nous reconnaissons qu'elle se compose de plusieurs parties bien distinctes, au nombre de six ; que deux de ces parties, voisines l'une de l'autre, ont en commun une *ligne* ; que les lignes ainsi formées viennent elles-mêmes se rencontrer aux sommets du cube, que nous désignons sous le nom de *points*.

Un examen un peu plus attentif nous montre que les diverses surfaces dont nous venons de parler jouissent de propriétés particulières d'après lesquelles nous les qualifions de *surfaces planes* ou de *plans* ; que les rencontres de ces plans sont des *lignes droites*. Et nous avons la notion précise du plan, de la ligne droite, du point par la seule contemplation de l'objet, bien que, pas plus que dans aucun des corps existant dans la nature, il n'y ait ni plan, ni droite, ni surface, ni ligne, ni point. Mais toutes ces abstractions sont indispensables à la constitution de la science, et d'autre part elles sont assez rapprochées de la réalité pour que l'erreur que nous commettons volontairement en les substituant aux choses réelles ne puisse présenter le moindre inconvénient, même dans la pratique.

Ces êtres de raison, surfaces, lignes, points, placés dans ce que nous appelons l'espace, sont les éléments des figures géométriques. Une fois l'abstraction première effectuée, nous pouvons, par des combinaisons à l'infini de ces divers éléments, créer, par notre seule imagination, tout le monde des faits géométriques.

Il est seulement nécessaire de compléter ces notions par des définitions aussi précises que possible, et par des axiomes, vérités évidentes qui ne sont le plus souvent que des définitions déguisées, comme l'a si justement fait remarquer M. H. Poincaré dans son remarquable article *Sur les Géométries non euclidiennes*, publié dans la *Revue générale des sciences* (1891, p. 769), article sur lequel nous aurons à revenir tout à l'heure.

Les géomètres de l'antiquité ont poussé à un très haut degré de perfection cette branche de la science, et l'on ne saurait assez admirer les prodigieux résultats auxquels ils sont parvenus, avec des moyens d'action aussi limités que ceux qu'ils possédaient. Mais l'erreur fondamentale qu'ils commirent, et qui est encore très généralement commise de nos jours, consistait dans la méconnaissance de l'élément expérimental qui est à la base de la Géométrie. Ils croyaient, comme beaucoup de savants n'ont cessé de le croire, que la science est d'autant plus pure qu'elle se rapproche plus complètement d'une suite d'opérations empruntées à la logique abstraite, sans aucune considération du monde extérieur.

Les axiomes et les diverses Géométries. — C'est à une époque toute récente, au cours du XIXe siècle, que l'attention des savants et des philosophes a été appelée sur ces questions. L'occasion en a été offerte par les efforts auxquels on s'était livré vainement pour démontrer une vérité fameuse, connue sous le nom de postulatum ou d'axiome d'Euclide, et qui peut s'énoncer ainsi : par un point, on ne peut mener qu'une seule

parallèle à une droite. Des hommes tels que Gauss, et plus tard Helmholtz, n'ont pas dédaigné de s'occuper de cette question. Mais elle paraît avoir été définitivement élucidée à la suite des travaux de deux grands esprits: Lobatschefsky (de Kazan) et le hongrois Bolyaï, qui, sans se connaître ni connaître leurs recherches, parvinrent à des résultats analogues. A leur suite, Riemann, Beltrami et d'autres encore consacrèrent de savantes recherches à cette étude, sans parler de beaucoup de savants dont les travaux ont été synthétisés dans l'article de M. Poincaré que nous avons rappelé plus haut.

Nous ne pouvons essayer même de donner ici une idée de ces doctrines; mais il est facile d'en extraire la substance en peu de lignes. Il suffit de constater ce fait, actuellement hors de doute, qu'en supprimant le postulatum d'Euclide, il est possible de construire de toutes pièces un système de Géométrie parfaitement logique, système variable suivant la proposition par laquelle on a cru devoir remplacer le postulatum.

La vérité, c'est qu'en dehors des axiomes qu'on énonce expressément, il en existe beaucoup d'autres, les uns pouvant prendre la forme de définitions, d'autres, d'une nature plus profonde, inhérents à la conception que nous nous faisons de l'espace. Et comme cette conception est absolue, par essence, tandis que nous ne pouvons jamais juger des choses que relativement, on en vient à reconnaître la profonde justesse de cette conclusion de M. Poincaré : « Il n'y a pas de Géométries plus ou moins vraies ; il y a des Géométries plus ou moins commodes ».

L'étude des Géométries non euclidiennes doit donc être regardée comme un exercice de l'esprit, pouvant même conduire incidemment à des résultats d'un véritable intérêt et jeter de la lumière sur les sciences voisines. Mais en ce qui concerne l'étude de l'étendue, de ses propriétés et de sa mesure, la conception eucli-

dienne sera toujours d'un usage universel, comme répondant mieux que toute autre à la notion naturelle de l'espace telle qu'elle se présente à nous par l'observation de la nature. Seulement, il est indispensable de l'accepter très franchement et de se dire que le perfectionnement ne consisterait pas à supprimer des axiomes pour leur substituer des démonstrations introuvables; mieux vaudrait au contraire, si la chose était possible, mettre plus complètement en évidence les axiomes implicites que nous employons à notre insu, comme par exemple les suivants : l'espace est infini ; il est partout identique à lui-même ; une figure peut être transportée de toutes pièces dans l'espace sans subir de modifications, etc., etc.

C'est donc dorénavant de la seule Géométrie euclidienne que nous nous occuperons dans ce qui va suivre.

Divisions de la Géométrie. — Comme toutes les branches de la Mathématique, la Géométrie est sans bornes. Son objet essentiel est la mesure de l'étendue; mais cette mesure ne pouvant pour ainsi dire jamais s'effectuer par voie de comparaison directe, ce n'est qu'en accumulant les connaissances sur les propriétés des figures qu'il est possible d'arriver indirectement au but que l'on poursuit. Parmi ces propriétés, les unes concernent explicitement des questions de mesure, et on les a appelées propriétés *métriques*; on a donné aux autres le nom de propriétés *descriptives*. Ce n'est pas néanmoins sur cette distinction, relativement récente, que pourrait être instituée la Géométrie, car, dans l'étude de presque toute figure, propriétés descriptives et métriques doivent être envisagées concurremment si l'on veut que cette étude soit complète.

Nous avons vu plus haut que les éléments des figures géométriques sont des volumes, des surfaces, des lignes et des points. De cet ordre logique, en le renversant, on peut conclure l'ordre contraire, en faisant

intervenir le mouvement, et en regardant une ligne comme engendrée par le déplacement d'un point, une surface par le déplacement d'une ligne, et un volume par le déplacement d'une surface limitée et définie.

Dans cet ordre d'idées, on pourrait imaginer la Géométrie des lignes, ne comportant que la notion d'une seule dimension, celle des surfaces, à deux dimensions, et celle des volumes ou de l'espace, à trois dimensions. Mais parmi les lignes, il en est une, la plus simple de toutes, la ligne droite, dont la notion nous est familière, bien que la définition en soit impossible. Parmi les surfaces, le plan est en général l'objet d'une définition qui n'en est pas une, car elle se réduit à une simple propriété expérimentale, vérifiable seulement par à peu près, savoir qu'on peut sur cette surface appliquer en entier une ligne droite dans une position quelconque. Mais le plan nous apparaît quand même, par suite d'un axiome si l'on veut, comme la plus simple de toutes les surfaces.

Ceci nous indique la possibilité d'une classification nouvelle, qui est à peu près celle que nous voyons en vigueur aujourd'hui, à une seule exception près : Géométrie sur la droite, à une dimension; Géométrie sur le plan, à deux dimensions; Géométrie dans l'espace, ou à trois dimensions. La première de ces trois parties n'est généralement pas même indiquée; on n'y attache aucune importance et l'on a grand tort; car ce domaine de la ligne droite, pour être plus restreint, n'en renferme pas moins un ensemble de propriétés intéressantes en elles-mêmes, et dont un grand nombre peuvent être avantageusement utilisées pour la Géométrie à deux ou à trois dimensions.

La Géométrie des anciens. — L'œuvre géométrique de l'antiquité est à peu près exactement représentée de nos jours par ce que l'on a coutume d'appeler la Géométrie élémentaire. Non seulement le fond de la pensée

mais aussi la forme de l'exposition ont été conservés avec une sorte de soin religieux qui est intéressant au point de vue historique, mais qui ne laisse pas de présenter certains inconvénients sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir plus tard. La division en huit livres, naguère encore universellement classique, reproduisait, à peu de variantes près, l'ancienne ordonnance de la Géométrie. Dans les deux premiers livres on étudie les figures planes formées par des droites, puis le cercle et les angles, sans qu'aucune propriété métrique concernant les longueurs de droites se présente. Puis, dans le troisième livre intervient la notion du rapport de deux longueurs; ce livre et le suivant sont consacrés aux propriétés qui s'ensuivent, à la détermination des aires polygonales, puis à l'étude des polygones réguliers, dont le cercle est considéré comme la limite.

Avec le cinquième livre, on commence à aborder la Géométrie des points, des droites et des plans dans l'espace, d'abord au point de vue purement descriptif; le sixième a pour objet les mesures concernant les polyèdres, le septième les figures sphériques les plus simples, et le huitième les mesures des surfaces et volumes des *corps ronds*. On appelle ainsi le cylindre de révolution, le cône de révolution et la sphère.

Une rapide étude des coniques (surtout de l'ellipse et de la parabole), qualifiées parfois de la dénomination de « courbes usuelles », qui est au moins bizarre, pour ne pas dire plus, forme une sorte de complément à cette partie de la Géométrie. Tout cela est le plus souvent présenté comme une suite de vérités qu'on énonce d'abord, pour les démontrer ensuite, en s'appuyant uniquement sur les définitions, sur les axiomes et sur les propositions précédentes. Lorsque, par exception, le calcul intervient, on s'attache à lui conserver une forme un peu archaïque; il semble qu'on se refuse de parti pris à profiter des ressources et des simplifications que pourrait offrir l'Algèbre.

Cette science, sous cet aspect un peu rigide, est en réalité l'un des exemples les plus frappants de la puissance logique de l'esprit humain, quand on se reporte surtout à l'époque où elle fut constituée. Il est remarquable, notamment, que les anciens soient arrivés à découvrir tant de propriétés des sections coniques.

Ce qui est encore plus étonnant, c'est la fécondité des ressources et la puissance des méthodes employées. Des travaux historiques d'une époque récente ont montré que certaines propriétés qu'on serait tenté de croire toutes modernes avaient été découvertes par les géomètres grecs et sans doute même auparavant.

Parmi ces méthodes géométriques, d'une application générale, l'idée la plus digne d'admiration peut-être est celle des lieux géométriques. Lorsque tous les points d'une figure jouissent d'une propriété déterminée, à l'exclusion de tous autres points, on dit que cette figure est le lieu géométrique des points jouissant de cette propriété. Il y a là l'élément d'une définition, ou plutôt de définitions diverses de toute figure géométrique. L'équivalence de ces définitions, qui permet de déduire d'une propriété tout un ensemble de propriétés nouvelles, est assurément l'un des objets essentiels de la Géométrie. Mais les lieux géométriques ont encore, pour la résolution des problèmes, une utilité d'un autre ordre, facile à comprendre; si l'on demande de trouver un point jouissant des propriétés (A) et (B), si le lieu des points jouissant de la propriété (A) est une figure F, et si le lieu des points jouissant de la propriété (B) est une figure F', la solution du problème se composera de tous les points communs aux deux figures F, F'. Soit, par exemple, qu'on demande de trouver sur un plan un point M également distant de deux droites D et D' et tel que le rapport $\frac{MP}{MP'}$ de ses distances à deux points P et P' soit donné. On sait : 1° que le lieu des points également

distants de deux droites se compose de deux autres droites, les bissectrices Δ et Δ' des angles formés par les droites données D et D'; 2° que le lieu des points tels que $\frac{MP}{MP'}$ soit de grandeur donnée est une circonférence. Il s'ensuit que les solutions seront les points communs à cette circonférence et à ces deux droites Δ et Δ'. Il pourra y en avoir quatre, deux ou pas du tout. Exceptionnellement, ce nombre pourra devenir 3 ou 1.

On retrouvera un peu plus loin, en Géométrie analytique, cette notion si féconde des lieux géométriques autour de laquelle pivote toute la science de l'étendue, et dont l'honneur appartient incontestablement aux géomètres de l'antiquité.

La Géométrie moderne. — Au cours du XIXe siècle, la Géométrie a été l'objet d'une sorte de renaissance dans laquelle notre pays tient une place particulièrement glorieuse. Chasles et Poncelet en sont peut-être les plus illustres représentants. Bien que l'œuvre de Chasles et de ses continuateurs ait eu pour objet principal d'affranchir la science de l'étendue, qui semblait être devenue simple tributaire du calcul, depuis l'invention de la Géométrie analytique et la découverte du Calcul infinitésimal, il est permis de se demander si les belles découvertes faites dans cet ordre d'idées auraient pu se produire sans le besoin de généralisation que l'introduction du calcul avait provoqué. Ce n'en fut pas moins une réaction salutaire, une revanche de la raison contre le mécanisme des méthodes, de la clarté contre les procédés qui conduisent au but par des voies souvent obscures.

La pierre angulaire du bel édifice dont Chasles fut l'architecte de génie, c'est la notion du rapport anharmonique, qui fut connu avant lui, mais dont personne n'avait su tirer parti à un tel degré. Si deux points A et B sont situés sur une droite, et que deux autres

points C et D soient sur la même droite, C divise le segment AB dans un certain rapport $\frac{CA}{CB}$ et D divise le même segment dans le rapport $\frac{DA}{DB}$; le rapport de ces deux rapports, c'est-à-dire $\frac{CA}{CB} \cdot \frac{DB}{DA}$ est le rapport anharmonique des quatre points A, B, C, D. C'est là l'origine première des théories de l'homographie, de l'homologie, de l'involution, qui rentrent dans la Géométrie moderne, bien que Desargues ait connu et utilisé l'involution. Rien ne peut donner une idée de l'abondance des propriétés que ces théories ont révélées, entre les mains d'habiles géomètres.

Un autre caractère essentiel de cette Géométrie moderne a été la considération de figures autres que les points, les lignes et les surfaces. Je veux parler des complexes et congruences, dont il convient de donner ici une idée générale, en se bornant au cas, particulièrement simple, des complexes et congruences linéaires. Lorsqu'une droite est assujettie à une condition simple, on dit qu'elle engendre un complexe ; si elle est assujettie à deux conditions, elle engendre une congruence ; et à trois, une surface. Par exemple, toutes les droites qui rencontrent une droite forment un complexe ; toutes celles qui rencontrent deux droites forment une congruence ; toutes les droites qui rencontrent deux droites et sont parallèles à un plan forment une surface.

Ces êtres géométriques nouveaux ont fait l'objet de travaux extrêmement remarquables. Ils ont emprunté leur origine, non seulement à la science du calcul, mais même à la Mécanique, ce qui n'a pas empêché d'en faire une étude purement géométrique.

A ce sujet, il est permis de s'étonner de l'opposition étrange et quelque peu sacrilège qu'on a souvent tenté d'établir entre le calcul et la Géométrie, entre les méthodes analytiques et les méthodes synthétiques, comme l'on dit parfois d'une façon abusive. L'homme est-il

donc si heureusement doué qu'il puisse s'attribuer le droit de dédaigner l'un quelconque des chemins qui peuvent le conduire à la recherche et à la découverte de la vérité ! Nous savons en réalité peu de chose ; mais en matière de Géométrie, ce peu, qui constitue notre patrimoine scientifique, nous le devons à la fois aux géomètres et aux analystes. L'esprit de généralisation d'une part, la considération raisonnée des faits en eux-mêmes, de l'autre, ont graduellement amené des progrès et des découvertes nouvelles. La science du calcul et la Géométrie pure se prêtent un mutuel appui ; nulle des deux n'est supérieure ni inférieure à l'autre. Sans le calcul, nous ne serions pas beaucoup plus avancés qu'on ne l'était du temps de Platon ; sans la Géométrie moderne, nous marcherions à la découverte de la vérité à peu près comme un homme qui erre en tâtonnant dans un souterrain, certain de ne pas s'égarer, mais condamné à ne voir la lumière qu'une fois son voyage terminé. Nous devons au calcul des solutions de beaux problèmes, à la Géométrie des méthodes merveilleuses, parfois étonnantes de simplicité, qui seules ont permis certaines découvertes. On a peine à comprendre comment des hommes de grande valeur ont pu tenter d'établir une sorte de préséance, de hiérarchie au profit de l'un ou de l'autre de ces deux grands moyens généraux, qui progressent surtout par leur aide réciproque.

Les transformations géométriques. — L'idée de transformation des figures était certainement connue des anciens, au moins dans des cas particuliers, mais c'est seulement dans la Géométrie moderne qu'elle a pris la place considérable qu'elle occupe à juste titre. D'une figure (F) quelconque, par des constructions bien nettement définies, on comprend qu'il est possible de déduire une nouvelle figure (F′) et que réciproquement on pourra revenir de la figure (F′) à la figure (F). Or, si une pro-

priété est connue, ou facile à découvrir, dans la figure (F'), il s'ensuit qu'on aura par cela même dans la figure primitive (F) une propriété qu'il eût peut-être été très difficile d'obtenir par des voies directes. De même pour la résolution d'un problème. On devine quelle puissance d'investigation une telle méthode générale fournit au géomètre, d'autant plus que les transformations sont en nombre illimité, que chaque jour on peut imaginer une transformation nouvelle.

Énumérer seulement les principales transformations générales devenues classiques serait impossible ici. C'est tout au plus si nous pouvons, au courant de la plume, rappeler l'homothétie, la similitude, l'inversion, l'homologie, l'homographie.

Mais il convient de signaler tout particulièrement, en nous bornant aux figures planes, le mode de transformation dans lequel à un point correspond une droite, à une droite un point, et dont Chasles a tiré un si merveilleux parti, en y puisant son *principe de dualité*. C'est là encore qu'on rencontre le germe de toute la belle théorie des polaires réciproques, à laquelle Poncelet a donné de si remarquables développements.

Ce qu'il faut surtout retenir de cette idée générale des transformations, c'est une démonstration nouvelle de ce fait que la Mathématique ne crée rien et que son rôle est constamment de nous présenter la vérité sous une forme plus accessible qu'elle ne l'était primitivement. Qu'il s'agisse de calcul ou de Géométrie, il en est toujours de même. Une transformation de figure n'est pas sans analogie avec une transformation d'équation. Dans un cas comme dans l'autre, la proposition à établir ou la solution à obtenir se trouvait masquée d'abord, pénible à découvrir. Grâce à la transformation opérée, cette vérité que nous poursuivons apparaît avec une clarté particulière ; nous l'établissons ou nous la constatons, puis, remontant par transformation inverse à la question primitive, celle-ci se trouve dès lors résolue.

La Géométrie projective. — Parmi les transformations possibles, en nombre infini, il en est de particulièrement intéressantes. Ce sont celles qui résultent de la construction effectuée en prenant un point fixe O, le joignant à tous les points M de la figure primitive et en déduisant la position du point M′ de la figure nouvelle, sur la droite OM, par une loi déterminée. La perspective d'une figure plane sur un autre plan, par exemple, est un cas spécial de ces transformations qui jouissent de propriétés fort intéressantes. C'est à l'étude de ces *propriétés projectives* que Poncelet a consacré son principal ouvrage de Géométrie. Depuis lors, les notions dont il s'agit ont été largement généralisées, surtout entre les mains de MM. Reye et Cremona, et il en est sorti, sous le nom de *Géométrie projective*, une véritable science à part, qui se développe chaque jour davantage et produit de brillants résultats.

La Géométrie cinématique. — Sans empiéter en rien sur les considérations que nous aurons à présenter plus loin sur la science du mouvement, il y a lieu de constater que la Géométrie en elle-même exige en maintes circonstances qu'on fasse intervenir l'étude du déplacement d'une figure. C'est là une question purement géométrique et non mécanique ; la notion des centres et axes instantanés en est un exemple intéressant, et c'est l'un des grands mérites de Chasles d'avoir jeté sur ces théories une clarté frappante, grâce surtout à la simplicité des moyens employés par lui. Mais il y avait un intérêt réel à ne pas laisser ces questions noyées en quelque sorte dans la masse des vérités géométriques. C'est principalement à M. Mannheim que revient l'honneur d'en avoir fait l'objet d'un chapitre à part, sous le nom de « Géométrie cinématique ». Après avoir apporté lui-même les plus importantes contributions à cette branche de la science, le créateur de la Géométrie cinématique a eu la satisfaction de voir de

nombreux disciples suivre la voie tracée par lui, soit en France, soit à l'étranger. Il en est résulté de nombreuses et intéressantes découvertes nouvelles, aussi importantes en elles-mêmes que par l'aide qu'elles apportent à la science du mouvement.

Il nous sera permis de profiter de cette occasion et de cet exemple pour faire ressortir le grand intérêt qu'il y a, tout en respectant la grande unité de la science, à la diviser en chapitres pour mieux étudier et approfondir certaines catégories de vérités. Ces chapitres ont entre eux des affinités nécessaires, l'étude de l'un réagit sur l'étude de l'autre ; mais il n'en est pas moins vrai que cette classification permet de voir beaucoup plus clair dans le chemin que l'on poursuit, et devient par cela même l'origine de découvertes nouvelles qui très probablement, sans ce secours, seraient restées ignorées. C'est à ce point de vue qu'on peut dire sans exagération que la création de la Géométrie cinématique a été un véritable bienfait scientifique.

La Géométrie du triangle. — S'il est une figure, parmi celles que présente la Géométrie, qui ait été étudiée depuis la plus haute antiquité, c'est assurément le triangle, formé par trois points et par les droites qui les joignent. Il pouvait sembler, après tant de travaux antérieurs, que rien dans ce domaine ne restait inconnu. Cependant, en 1873, un mathématicien français, M. Émile Lemoine, publia un petit mémoire concernant un point remarquable du plan d'un triangle dont on avait constaté séparément de nombreuses propriétés sans remarquer qu'elles s'appliquaient toutes à ce seul point, désormais désigné, avec justice, sous le nom de *point de Lemoine*. Bientôt suivi par un grand nombre de confrères, parmi lesquels il convient de citer surtout M. le commandant Henri Brocard et M. Neuberg, M. Lemoine créa de la sorte une branche géométrique nouvelle, sous le nom de « Géométrie du

triangle », et contribua personnellement au développement de cette partie de la science par d'incessantes publications. L'étendue prise par la Géométrie du triangle est aujourd'hui considérable ; on la cultive dans presque tous les pays où la science mathématique a des représentants, et il serait profondément injuste de méconnaître l'intérêt des nombreux résultats obtenus. Peut-être serait-on en droit de reprocher à cette branche de la Géométrie de s'être un peu égarée à la poursuite des vérités de détail ; mais il est à espérer qu'un jour, prochain peut-être, une sorte de synthèse permettra de donner un corps plus solide à cette doctrine déjà si féconde, et lui apportera ainsi une force nouvelle, destinée à produire des résultats plus complets et plus importants encore.

La Géométrographie. — C'est aussi à M. Émile Lemoine qu'on est redevable de la *Géométrographie*, ou « art des constructions géométriques ». Steiner (et M. Lemoine ne s'en doutait guère quand il jeta les premières bases de la Géométrographie) avait, dans un passage tout récemment mis au jour, attiré l'attention sur le grand intérêt qu'offrirait un moyen méthodique de comparaison entre les diverses constructions qui peuvent permettre d'obtenir avec la règle et le compas un résultat géométrique déterminé. C'est à ce vœu que la Géométrographie donne satisfaction. En remarquant que toute construction, si compliquée soit-elle, est constamment réductible à un certain nombre de constructions élémentaires, toujours de même nature, et en assimilant entre elles, par une hypothèse bien naturelle et justifiable, ces constructions élémentaires de même nature, M. Lemoine est arrivé par un système simple de notations à pouvoir analyser une construction géométrique quelconque et à la caractériser par deux nombres, appelés par lui *coefficient de simplicité* et *coefficient d'exactitude*.

Nous ne saurions entrer ici dans aucun détail à ce sujet. Mais il nous est permis de constater que la Géométrographie est dès à présent cultivée et même enseignée dans plusieurs pays étrangers, et d'exprimer le vœu qu'il en soit de même un jour dans sa patrie d'origine.

Les Géométries à n dimensions. — Le besoin de généralisation qui est la caractéristique de l'esprit mathématique devait conduire certains géomètres à sortir du domaine de l'espace réel à trois dimensions, dans lequel nous sommes placés, et à se demander quelles pourraient être les propriétés des figures tracées dans les espaces supérieurs dont nous ne pouvons d'ailleurs avoir aucune notion directe ou indirecte. C'est surtout par l'intermédiaire du calcul qu'on est arrivé à s'engager dans cette voie. Une formule déterminée répondant à une figure bien caractérisée de notre espace, on a donné un nom analogue à une figure hypothétique répondant à une formule analogue. Il en est résulté que les Géométries à plus de trois dimensions n'ont guère été qu'un moyen de donner des formes géométriques à des faits algébriques. Peu à peu cependant, et en poursuivant les analogies, on a reconnu qu'il était possible de raisonner sur ces êtres géométriques supposés, de manière à obtenir des résultats s'appliquant au monde réel, c'est-à-dire, comme toujours, aux abstractions auxquelles ce monde réel nous conduit.

Dans cette mesure, les Géométries à n dimensions ne sont pas sans présenter certains avantages. Elles abrègent le langage, peuvent dispenser de longs calculs, permettre à l'esprit de moins s'égarer dans les symboles. Mais autant une pareille étude est digne d'intérêt et d'une utilité réelle si on la maintient dans ses limites naturelles, autant elle deviendrait funeste dans le cas où l'on prétendrait lui accorder la réalité qui appartient à l'espace dans lequel nous vivons. Cela ne deviendrait

plus qu'un jeu plus ou moins brillant de l'esprit, se mettant au service de rêveries directement contraires au but de la Mathématique.

La Géométrie de situation. — Nous avons indiqué, dans le chapitre premier, cette branche si intéressante de la Mathématique. Elle se rattache à la Géométrie par son titre, à l'analyse des combinaisons, et par conséquent à l'Algèbre, par une grande partie des objets qu'elle étudie, à l'Arithmologie par plusieurs de ses conséquences. Enfin, elle rend des services importants dans la Théorie des fonctions et dans les applications géométriques du Calcul infinitésimal. Des auteurs considérables ne craignent pas de consacrer aujourd'hui d'importants chapitres à la Géométrie de situation ou *analysis situs*, comme l'ont fait MM. Picard et Simart dans leur *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*. C'est une sorte de Protée affectant des formes diverses, suivant le but poursuivi.

Dans la Géométrie de situation, ce n'est plus la mesure que l'on se propose ; on examine les figures ou les objets, au point de vue de leurs positions respectives; ainsi, dans les surfaces, ce sont les ordres de connexion qui constituent l'étude essentielle. Les problèmes si nombreux et généralement si difficiles, concernant les jeux d'échecs, de dominos, les labyrinthes, les figures magiques, etc., appartiennent à la Géométrie de situation. Dans cet ordre d'idées je ne résiste pas au plaisir de citer un des ouvrages les plus originaux et les plus curieux qui aient été publiés dans ces dernières années, ouvrage d'autant plus intéressant qu'il n'émane pas d'un mathématicien de profession. Je veux parler du livre de M. Gabriel Arnoux : *Arithmétique graphique ; les espaces arithmétiques hypermagiques*. Il serait surprenant que les idées si profondément nouvelles et fécondes semées dans ce modeste volume

n'arrivassent pas un jour à produire d'heureux et brillants résultats dans les questions arithmologiques, lorsqu'un savant de haute valeur, et désireux de faire progresser la Théorie des nombres, voudra se décider à en prendre connaissance et à en tirer parti.

CHAPITRE VII

La Géométrie analytique.

Les coordonnées. — De tout temps, on a fait application du calcul à la Géométrie. Ce n'est donc pas cette application qui caractérise l'immortelle découverte de Descartes, l'inventeur de la Géométrie analytique. Mais il a eu la gloire de donner à cette application un caractère systématique uniforme, et d'établir que toutes les propriétés géométriques pouvaient se traduire par des relations numériques. Pour arriver à un tel résultat, il allait tout d'abord montrer comment par des données numériques il était possible de représenter le point, premier élément essentiel de toute figure, et de fixer ainsi la position d'un point. C'est à quoi l'on arrive par l'établissement des *coordonnées*.

Pour plus de clarté, nous ne parlerons tout d'abord ici

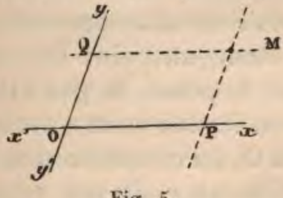


Fig. 5.

que des questions de Géométrie plane, et nous commencerons par définir les coordonnées *rectilignes* ou *cartésiennes*. Si deux droites fixes qui se coupent, X'OX,

appelle *l'équation* de la ligne; une ligne étant définie, son équation s'ensuit, et réciproquement l'équation d'une ligne étant donnée, on peut en déduire la forme, la position et les propriétés de cette ligne.

Pour préciser, il faut bien remarquer que la définition d'une ligne implique ses propriétés et qu'au point de vue qui nous intéresse, cette définition est nécessaire pour que la ligne ait une existence. Suivant la remarque très juste d'Auguste Comte, toute définition géométrique explicative est une équation de cette ligne dans un certain système de coordonnées, si l'on traduit en symboles numériques la définition dont il s'agit. Pour prendre le plus simple des exemples, cette définition : « la circonférence est une courbe dont tous les points sont à une même distance d'un point fixe appelé centre » donne l'équation $r=a$, en coordonnées polaires, si l'on prend l'origine O au centre et si l'on désigne par a la longueur du rayon.

Il peut être parfois assez difficile d'effectuer cette traduction, mais elle est toujours philosophiquement possible, et il s'ensuit que toute ligne ne peut en réalité être conçue autrement que comme un lieu géométrique. Il y a plus; c'est que lorsqu'on a trouvé l'équation, en coordonnées cartésiennes par exemple, cette équation elle-même n'est en réalité qu'une forme spéciale de la définition de ce lieu géométrique.

Cette identité de la représentation analytique [1] des lignes avec la notion des lieux géométriques est de la plus haute importance. C'est là l'origine de tous les résultats si nombreux et si féconds de la Géométrie analytique; c'est là aussi qu'il faut chercher le lien étroit et indissoluble qui unit la science du calcul à la science de l'étendue.

---

[1] Le mot « analytique » est appliqué ici pour exprimer l'emploi du calcul, suivant l'usage habituel. C'est dans le même sens qu'il entre dans la désignation de la branche qui nous occupe, la Géométrie analytique. Il faut d'ailleurs reconnaître que la méthode analytique est ici d'un usage tellement constant que l'expression est assez justifiée.

Quand on se propose un problème déterminé : « trouver un point qui jouisse de telles ou telles propriétés, » si l'on néglige une de ces propriétés, on reconnaîtra que le point doit se trouver sur une ligne, autrement dit qu'il doit appartenir à un certain lieu géométrique dont l'équation est $f(x,y)=o$. Si l'on fait abstraction au contraire d'une autre des propriétés énoncées, le point devra se trouver sur un autre lieu géométrique, ayant pour équation $\varphi(x,y)=o$. Il devra donc se confondre avec l'un des points communs aux deux lignes en question, et ses coordonnées vérifiant à la fois les deux équations seront obtenues en résolvant le système qu'elles forment à elles deux ; le problème de Géométrie a été ainsi ramené à une question de calcul.

Pour la recherche des lieux géométriques eux-mêmes, la Géométrie analytique nous offre une ressource non moins merveilleuse, à cause de sa généralité. On s'en rendra compte par un exemple simple ; supposons qu'il s'agisse de déterminer le lieu géométrique des points tels que le rapport de leurs distances à un point P et à une droite (D) soit égal à $\frac{1}{2}$. Supposons que M soit l'un des points du lieu cherché, et appelons λ la distance MP ; la distance de M à (D) sera 2λ. Ainsi M appartient à la circonférence de centre P et de rayon λ ; soit $f(x,y,\lambda)=o$ l'équation de cette circonférence ; M appartient aussi à une droite parallèle à (D) à une distance 2λ ; soit $\varphi(x,y,\lambda)=o$ l'équation de cette droite.

Si l'on vient à éliminer λ entre ces deux équations, on aura une relation qui devra exister nécessairement entre x et y, quelle que soit la valeur attribuée à λ. Ce sera donc précisément l'équation du lieu demandé.

Il est bien facile de reconnaître que le raisonnement présenté sur cet exemple très simple est d'un usage entièrement général.

Transformation des coordonnées; classification des lignes. — Lorsqu'une ligne est rapportée à un système d'axes coordonnés cartésiens OX, OY, elle a une certaine équation $f(x, y) = o$. On peut se proposer de chercher quelle serait son équation si on la rapportait à un autre système O_1X_1, O_1Y_1. La Géométrie analytique résout ce problème en le ramenant à un autre plus simple, et que voici : connaissant les coordonnées x, y d'un point M par rapport à OX, OY, trouver ses coordonnées x_1, y_1, par rapport à O_1X_1, O_1Y_1. On établit que x_1, y_1 s'expriment par des fonctions du premier degré de x, y, et inversement, et il résulte immédiatement de là que l'équation d'une ligne $f(x, y) = o$, si elle est algébrique, conserve le même degré quand on passe d'un système d'axes coordonnés à un autre système. C'est l'avantage capital et incontestable de la méthode des coordonnées cartésiennes, car elle permet, par cela même, d'établir une classification de toutes les lignes qui ont des équations algébriques, et qu'on appelle *courbes algébriques*, d'après les degrés des équations elles-mêmes. C'est aux lignes qu'on applique désormais le degré, ou l'*ordre*, comme l'on dit plus souvent peut-être. L'unique ligne du premier degré ou du premier ordre est la droite; les lignes du second ordre sont les coniques (ellipse, hyperbole et parabole); et de même pour les lignes algébriques d'ordres plus élevés.

Extension à l'espace. — On comprend aisément que la plupart des notions générales de Géométrie analytique que nous venons d'indiquer, surtout en ce qui touche la méthode des coordonnées cartésiennes, sont susceptibles d'une extension à la Géométrie de l'espace. Que l'on suppose, en effet, trois axes coordonnés OX, OY, OZ formant un trièdre, et en menant par un point M des plans parallèles aux faces, on obtient sur OX, OY, OZ trois points d'intersection P, Q, R. Les

nombres qui mesurent les segments OP, OQ, OR sont les coordonnées de M; les coordonnées d'un point déterminent ce point; et réciproquement la position d'un point entraîne la connaissance de ses coordonnées, le tout sans ambiguïté.

Une équation $f(x, y, z) = o$ qui lie les trois coordonnées d'un point variable représente une surface; on peut changer d'axes, et l'équation d'une même surface, si cette équation est algébrique, ne change pas de degré lorsque les axes changent, en sorte que les surfaces algébriques peuvent être classées d'après leurs degrés, ou leurs ordres.

En tout ceci, l'analogie est manifeste. Elle l'est tellement, surtout au point de vue du calcul, qu'il est permis de se demander s'il n'y aurait pas un véritable intérêt, dans une exposition doctrinale un peu complète de la Géométrie analytique, à présenter l'ensemble des théories essentielles concurremment dans le plan et dans l'espace, et en s'élevant tout naturellement d'une notion à l'autre; de rares tentatives ont été timidement faites jusqu'ici dans cet ordre d'idées; nous serions étonné si quelque jour elles ne finissaient pas par produire des résultats efficaces, sous l'influence d'efforts nouveaux et plus énergiques.

Il faut néanmoins reconnaître que certaines notions de la Géométrie analytique de l'espace semblent se refuser, mais plus en apparence qu'en réalité bien souvent, à la poursuite de cette analogie. C'est ainsi qu'une ligne dans l'espace, c'est-à-dire en général une courbe gauche, est représentée par l'ensemble de deux équations $f(x, y, z) = o$, $\varphi(x, y, z) = o$, ce qui traduit cette vérité géométrique qu'une ligne est l'intersection de deux surfaces. Mais en tout cas, si la mise en œuvre du calcul peut arriver dans certaines questions à se compliquer et à présenter des difficultés particulières, l'esprit général de la science reste le même; c'est toujours, uniformément, la réduction systématique

de toute question de Géométrie à une question de calcul qui constitue le but essentiel de la Géométrie analytique ; et ce but, on l'atteint par des moyens analogues, qu'il s'agisse du plan ou de l'espace. Si donc nous établissons une distinction dans les rapides considérations qui vont suivre, c'est uniquement dans le but d'être plus aisément suivi et compris.

Théorie des courbes planes. — Pour se faire une idée complète de la Géométrie analytique et en apprécier l'immense étendue, il ne faudrait pas restreindre cette science aux éléments qui figurent d'habitude sous ce titre dans l'enseignement. Elle comprend en réalité toutes les applications du calcul, et notamment du Calcul infinitésimal, à la science de l'étendue ; et il est digne de remarque que ce soit précisément l'étude des courbes planes, considérée au point de vue de la recherche des tangentes, qui ait conduit à la création du Calcul infinitésimal, comme nous avons eu l'occasion de l'indiquer précédemment. Cette observation confirme bien la grande unité de la Mathématique, dont les diverses branches, tout en se ramifiant à l'infini, arrivent à se souder entre elles et à se prêter un mutuel appui.

L'étude des courbes planes, avec le secours de la Géométrie analytique, de l'Algèbre proprement dite et du Calcul infinitésimal, peut être faite à un double point de vue. Il est possible d'en étudier successivement les propriétés, en commençant par celles d'un degré plus faible pour s'élever de proche en proche, sauf à examiner à part les courbes transcendantes (dont les équations ne sont pas algébriques) ou du moins quelques-unes d'entre elles.

L'autre méthode consiste à remarquer que certaines recherches s'appliquent également d'une façon uniforme à toutes les courbes, soit algébriques, soit transcendantes, et à construire ainsi des théories générales,

dont l'application se fera ensuite aux courbes des divers degrés, et sera généralement d'autant plus difficile que le degré sera plus élevé.

La première méthode a prévalu pendant de longues années, et c'est à peine si l'étude ordinaire de la Géométrie analytique avait dépassé les coniques et quelques aperçus concernant les courbes du troisième ordre, jusque vers le quart du XIXe siècle. Mais les travaux plus récents accomplis dans le monde mathématique tout entier ont été marqués par une tendance contraire et plus philosophique. C'est vers la seconde méthode qu'on s'est orienté désormais, se préoccupant des théories générales beaucoup plus que de l'étude particulière des courbes de tel ou tel degré.

Ce résultat, dont il y a lieu de se féliciter quant aux espérances de progrès futurs qu'il permet de concevoir, a été dû pour une bonne part aux conquêtes de la Géométrie moderne, qui fournissait assez de ressources pour l'étude des coniques et permettait ainsi à la Géométrie analytique de prendre son essor vers des régions plus vastes et plus dignes d'elle.

Nous devons nous borner à mentionner ici quelques-unes des questions qui permettent de constituer autant de chapitres particuliers de la théorie des courbes planes. L'une des plus importantes, et qui appelle surtout l'Algèbre à son aide, est celle de la détermination d'une courbe par un certain nombre de points. Très simple dans les cas ordinaires, le problème se complique et présente de réelles difficultés, qui ne sont pas toutes aplanies, lorsque l'on considère les points particuliers qui offrent des singularités, en particulier les points multiples, d'inflexion, de rebroussement, etc. Le principe de dualité rattache à cette question celle de la détermination d'une courbe par des tangentes, et conduit à la notion de la *classe* d'une courbe (nombre de tangentes qui peuvent en général lui être menées par un point quelconque).

Ce simple aperçu montre que déjà les tangentes interviennent dans ces premières questions particulières; la théorie des tangentes est donc, comme l'on devait s'y attendre, l'une de celles qui joueront ici le rôle le plus important. Les normales et les asymptotes s'y rattachent assez étroitement. Ces considérations appliquées aux coniques conduisent aux propriétés des pôles et des polaires; et l'analogie permet d'étendre ces propriétés aux courbes d'ordres supérieurs.

Il y a lieu de citer aussi l'étude de la courbure, des courbes osculatrices, des contacts de divers ordres, celle des enveloppes d'une courbe variable, des développées et développantes; les diamètres, les axes, les centres sont encore autant de chapitres de la Géométrie analytique.

Enfin, la détermination des aires des courbes et des longueurs de leurs arcs, relevant du Calcul intégral, rentre également dans ces généralités dont l'application peut ensuite être faite à toute courbe particulière.

Cette énumération, nécessairement incomplète, présenterait la plus grave des lacunes si nous ne signalions l'importance de l'étude générale des transformations faite au point de vue de la Géométrie analytique. En particulier, les transformations spéciales qui donnent lieu aux polaires, aux caustiques, aux conchoïdes, aux courbes parallèles, présentent un intérêt tout à fait général.

Nous insistons sur ce fait que nous ne nous proposons nullement ici de reproduire une table des matières d'un traité de Géométrie analytique en ce qui touche la théorie générale des courbes planes. Nous avons seulement voulu, par l'indication de quelques exemples, montrer combien est vaste, et même indéfini, ce champ d'étude où tant de brillantes moissons ont été récoltées déjà, surtout depuis un demi-siècle.

Théorie des surfaces. — L'étude de la Géométrie analytique prend une extension bien plus grande

encore quand on en considère l'application aux figures de l'espace. La théorie des surfaces, comprenant bien entendu les courbes gauches, représente aujourd'hui un incomparable monument scientifique. On ne peut l'approfondir d'une façon un peu complète que par une connaissance des propriétés des équations différentielles, et nous voyons encore ici le Calcul intégral, la Théorie des fonctions, la Géométrie pure se fondre pour ainsi dire dans la branche la plus remarquable, et aussi la plus difficile, de la Géométrie analytique. Moins encore ici que dans ce qui précède, nous ne serions en état de fournir une nomenclature tant soit peu complète des sujets qu'embrasse la théorie des surfaces. On comprend seulement que des éléments analogues à ceux des courbes planes interviennent dans l'étude des lignes gauches. Il s'en introduit de nouveaux, comme par exemple le plan osculateur et la torsion. Une courbe gauche pouvant être considérée comme placée sur une surface, celles de ces courbes tracées sur une surface simple formeront une classe qui pourra présenter des propriétés remarquables; c'est ainsi que les courbes sphériques ont fait l'objet de très nombreux travaux et que plus généralement on a fait une étude, sous le nom de Géométrie sphérique, des figures quelconques tracées sur la surface d'une sphère.

Quant aux surfaces en général, en dehors de leur degré, si elles sont algébriques, elles sont souvent envisagées au point de vue de leur génération géométrique. Les surfaces réglées, par exemple, sont celles engendrées par une ligne droite; parmi elles, on distingue les surfaces développables, qui peuvent par déformation s'étendre sur un plan; le cylindre et le cône en sont des cas très particuliers; les autres sont des surfaces gauches. D'une manière plus générale, on a abordé le problème, d'ailleurs [illegible] difficile, des surfaces applicables sur [illegible]

L'étude [illegible] pour les

cette théorie un rôle considérable; on comprend combien la notion de courbure se complique alors, puisqu'il s'agit des courbures de toutes les différentes lignes qui peuvent être tracées sur la surface par le point considéré. On est cependant arrivé, dans cet ordre de recherches, à des résultats remarquables et d'une haute généralité. C'est de là qu'on est arrivé à la notion des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, des lignes géodésiques. Pour ces diverses études, les géomètres font un grand usage des coordonnées curvilignes, que nous ne saurions définir ici, mais qui semblent constituer l'un des plus hauts degrés de généralisation auxquels l'idée fondamentale de Descartes puisse être soumise. Toute une classe remarquable, celle des surfaces minima, a été particulièrement étudiée, surtout dans ces dernières années; et bien que le champ des découvertes soit encore indéfiniment ouvert, on ne peut se défendre d'admiration devant le nombre et l'importance des vérités acquises en un temps relativement restreint.

Ce qu'il y a de remarquable dans ces recherches récentes, c'est qu'elles s'appuient tout à la fois sur la Géométrie, l'Algèbre, le Calcul infinitésimal, la Théorie des fonctions, et même souvent sur la Mécanique. Réciproquement, les propriétés des surfaces ainsi découvertes réagissent de la façon la plus heureuse sur les progrès des sciences auxquelles ont été faits les emprunts. La Géométrie analytique, au degré de généralité qu'elle a atteint, reçoit ainsi de toutes parts la contribution des autres branches de la Mathématique, et rend avec usure les bienfaits qu'elle a reçus. Sans l'intervention des idées géométriques, pour ne citer qu'un exemple déjà ancien, la théorie des équations aux dérivées partielles n'aurait fait aucun progrès; et l'on se demande même si le problème se serait posé.

Bien que nous soyons en général très systématiquement réservé en fait d'indications bibliographiques, il

nous semble impossible de clôturer ce paragraphe sur la théorie des surfaces sans signaler l'œuvre si considérable de M. Gaston Darboux, dans laquelle sont résumés les travaux les plus intéressants relatifs à ce sujet : *Leçons sur la théorie des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.*

Coordonnées trilinéaires et tétraédriques; coordonnées tangentielles. — Nous avons indiqué plus haut qu'on peut imaginer à l'infini des systèmes de coordonnées. Parmi eux, il en est un dont l'usage est tellement répandu et souvent si utile qu'il mérite ici une mention spéciale.

Si l'on prend un triangle ABC et un point M dans son plan, on peut considérer les distances α, β, γ de ce point aux trois côtés du triangle, ou encore les nombres α', β', γ' qui mesurent trois poids placés en A, B, C et dont M serait le centre de gravité. Trois nombres quelconques proportionnels à α, β, γ ou à α', β', γ' sont ce qu'on appelle *les coordonnées trilinéaires* de ce point M par rapport au *triangle de référence* A B C. Dans le premier cas, on a des *coordonnées normales;* dans le second, des *coordonnées barycentriques.* Ces coordonnées trilinéaires sont toujours homogènes; c'est-à-dire qu'on peut remplacer les coordonnées par des nombres proportionnels quelconques; et les équations de lignes qu'on obtient sont toujours homogènes, et du même degré qu'en coordonnées cartésiennes. On peut d'ailleurs se servir d'autant de systèmes de coordonnées trilinéaires qu'on voudra, en plus des deux qui précèdent.

On pressent l'analogie et l'extension possible à l'espace, en prenant un *tétraèdre de référence* ABCD au lieu d'un triangle. S'il s'agit par exemple de coordonnées barycentriques, α, β, γ, δ (ou des nombres proportionnels) seront les coordonnées du point M, si M est le centre de gravité des quatre poids α, β, γ, δ placés en A, B, C, D. Ces coordonnées tétraédriques rendent de

grands services dans beaucoup de questions, de même que les coordonnées trilinéaires pour le plan, en simplifiant les calculs et leur donnant une plus grande symétrie.

On a été conduit aussi, et surtout par l'application des coordonnées homogènes que nous venons d'indiquer, à l'emploi des *coordonnées tangentielles*. Celles-ci résultent de l'introduction du principe de dualité. Si dans le plan par exemple $u\alpha + v\beta + w\gamma = o$ représente une certaine droite, les valeurs u, v, w caractérisant cette droite seront dites les *coordonnées tangentielles de la droite en question*. On établit alors qu'un point est représenté par une équation du premier degré.

Dans l'espace, les coordonnées u, v, w, s sont celles d'*un plan*. Un point est représenté par une équation du premier degré. Une droite est déterminée par les coordonnées de deux plans passant par cette droite, ou bien par les équations de deux points qui lui appartiennent. Ces diverses coordonnées, si l'on en possède un peu le maniement, sont du secours le plus précieux dans bien des cas; et elles ont le très grand mérite d'établir un lien moins indirect que les méthodes habituelles entre les symboles algébriques employés et les faits géométriques auxquels ces symboles correspondent.

Le Calcul géométrique. — Malgré les résultats considérables que l'on doit à la conception de Descartes et à l'usage des coordonnées généralisées sous mille formes, il est permis de se demander si, parvenue au point où elle en est aujourd'hui, la Géométrie analytique n'aurait pas avantage à emprunter un autre secours.

Nous avons déjà signalé, au point de vue algébrique, l'intérêt que présente la méthode des équipollences en ce qui concerne les faits de la Géométrie plane, celle des quaternions pour ceux de l'espace, et la méthode de Grassmann. D'une façon plus générale encore, tout

système dans lequel les éléments géométriques seront représentés directement par des symboles susceptibles d'être combinés suivant les règles d'une Algèbre précise constituera un *Calcul géométrique*.

Qu'il s'agisse d'un Calcul géométrique déjà connu, ou à découvrir, on comprend les avantages qui s'ensuivent, et qui n'excluent d'ailleurs en rien l'emploi des coordonnées dans certains cas spéciaux. Cette relation directe entre les formules et les faits à étudier est un grand soulagement pour l'esprit et apporte de la clarté ; car souvent l'appareil du calcul cache la vérité essentielle que ce calcul contient sous une forme nuageuse. La simplification dans les écritures est aussi un bienfait fort appréciable. Mais il y a plus encore ; l'Algèbre systématiquement appliquée par la voie des coordonnées, manque de souplesse et ne se prête pas à des nuances géométriques, pour ainsi dire, qui ont cependant leur importance ; il s'ensuit, quant aux conséquences géométriques, qu'on peut arriver à des résultats, sinon faux, du moins imparfaits ; à cette imperfection un calcul géométrique bien établi portera remède, parce qu'il aura tiré ses principes essentiels de la Géométrie elle-même.

Pour éclaircir cette idée par un simple exemple, on sait qu'en coordonnées rectangulaires l'équation $x^2 + y^2 = 1$ représente une circonférence, et $x^2 - y^2 = 1$ une hyperbole équilatère.

On dira encore que ces équations sont équivalentes à celles-ci :

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad (1) \qquad y = \sqrt{x^2 - 1}, \quad (1')$$

et aussi aux deux systèmes :

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{array}\right\} \quad (2) \qquad \left.\begin{array}{l} x = \mathrm{Ch}\,t, \\ y = \mathrm{Sh}\,t, \end{array}\right\} \quad (2')$$

t étant un certain paramètre dont l'élimination conduit en effet aux équations primitives.

Or, l'équation (1) donne bien réellement tous les

points de la circonférence si l'on fait varier x de -1 à $+1$; l'équation (1') donne tous les points de l'hyperbole si x varie de $-\infty$ à -1 ou de 1 à $+\infty$. Chacun des points est obtenu *une seule fois*, et on cesse de rien obtenir si l'on sort des limites indiquées.

Au contraire, le système (2), quand nous faisons varier t de $-\infty$ à $+\infty$, nous donnera *une infinité de fois* la même circonférence. Et quant au système (2') dans les mêmes conditions, il ne fournira que *la moitié* de l'hyperbole, c'est-à-dire l'une de ses branches seulement.

On voit combien des calculs algébriques pareils, ou semblant tels, peuvent répondre à des faits géométriques essentiellement divers, et quels services pourrait rendre le calcul géométrique en faisant disparaître de telles confusions. Les équipollences en effet, dans les exemples que nous venons de citer, dissipent avec la plus grande facilité ces obscurités tant soit peu paradoxales.

La représentation analytique des figures est un chapitre de la science auquel on n'a peut-être pas jusqu'ici apporté tout le soin attentif qu'il faudrait; et le Calcul géométrique seul est de nature à rendre possible une œuvre de cette nature.

L'introduction des imaginaires en Géométrie analytique. — La nécessité d'interpréter les résultats de l'Algèbre a conduit depuis longtemps à introduire en Géométrie analytique des figures imaginaires, auxquelles on prête une réalité sans qu'elles aient aucun caractère objectif. Sur ces figures on raisonne comme si elles existaient réellement, et cela n'a rien que de très licite ; mais il faut bien reconnaître, là encore, qu'on ne fait guère autre chose qu'énoncer des vérités d'ordre algébrique en les habillant d'une autre manière. Quand par exemple on dit qu'une droite extérieure à un cercle le coupe en deux points (imaginaires), quand on parle d'une droite (isotrope) qui en chacun de ses points est per-

pendiculaire à elle-même; d'un foyer, qui n'est autre chose qu'un cercle de rayon nul doublement tangent à une conique, toutes ces formes de langage sont faites pour surprendre celui qui en ignorerait l'origine purement algébrique; et elles ne prennent une valeur géométrique que par extension, et aussi parce qu'elles peuvent conduire à d'utiles résultats.

Il est un autre mode d'introduction systématique des imaginaires sur lequel un certain nombre de tentatives intéressantes ont porté, sans que jusqu'ici on semble être parvenu à un résultat définitif et décisif. Nous voulons parler de l'emploi de ces symboles imaginaires en coordonnées cartésiennes, lorsqu'on les substitue aux coordonnées elles-mêmes. En d'autres termes, que deviendra géométriquement le point de coordonnées (x, y) ou (x, y, z) lorsqu'on donnera à x, y, z des valeurs imaginaires? Comment à ces éléments nouveaux, à ces *points* de coordonnées imaginaires s'appliqueront les calculs de la Géométrie analytique, et que produiront-ils?

Parmi les auteurs qui se sont occupés de cette question d'un haut intérêt, on peut citer surtout Laguerre, Marie, MM. Mouchot et G. Tarry. La question a été assez avancée en ce qui concerne la Géométrie plane; mais il reste encore une lacune considérable, car la Géométrie à trois dimensions ne se prête pas, ou du moins se prête incomplètement aux conceptions mises en avant jusqu'ici. Le jour où un tel problème aura été définitivement résolu sera celui d'un grand progrès accompli en Géométrie analytique.

CHAPITRE VIII

La Mécanique rationnelle [1].

Définition et objet de la Mécanique. — On définit généralement la Mécanique : « la science du mouvement et des causes qui le produisent ». Mieux vaudrait s'en tenir à la première partie, car sur les causes nous ne savons rien ; ou plutôt, nous donnons le nom de causes à des entités et à des locutions forgées par notre cerveau. Du reste, dans toutes les sciences expérimentales, le même fait se produit ; le progrès ne consiste pas à chercher à proprement parler la cause d'un phénomène, mais à découvrir les lois qui le régissent, et surtout, par l'application de ces lois, à le faire rentrer dans un phénomène plus général, dont il devient une simple conséquence à titre de cas particulier. Rien n'empêchera de qualifier de cause ce phénomène général, pour la commodité du langage, mais on n'aura fait que déplacer la difficulté.

Dans l'échelle générale des sciences, la Mécanique occupe un rang tout particulier, dont elle tire sa haute importance philosophique. Placée aux confins des sciences dites exactes et des sciences physiques, elle participe à la fois des unes et des autres ; il s'ensuit que

---

[1] Une grande partie des réflexions contenues dans ce chapitre sont extraites d'un article sur le même sujet, publié dans la *Grande Encyclopédie*. (Voir t. XXIII, p. 484.)

suivant les prédispositions personnelles de chacun, on arrive à attribuer à cette science des caractères différents et même contradictoires. Si l'on s'est bien pénétré cependant de la vérité sur laquelle nous avons tant insisté dans ce qui précède, à savoir que toutes les sciences sont expérimentales, on reconnaîtra qu'il n'y a plus à déterminer qu'une question de degré, et que cette détermination devient chose relativement facile.

L'observation préalable du monde extérieur, toujours indispensable, fournit à la science mathématique pure, telle que nous l'avons considérée jusqu'ici, un petit nombre de vérités fondamentales, desquelles un système purement logique et rigoureusement établi permettra de déduire un nombre incalculable de conséquences.

Dans les sciences physiques, au contraire, l'expérience et l'observation doivent être perpétuellement en jeu ; elles provoquent la recherche de lois nouvelles, et une fois ces lois découvertes, elles en prouvent l'exactitude et en établissent la vérification.

En Mécanique, il y a une situation intermédiaire. Aucun axiome fondamental n'est directement fourni par l'observation de la nature, et cependant l'expérience n'est pas appelée à une vérification permanente pour le moins inutile. Au lieu d'axiomes (et tout en s'emparant de tous ceux qui concernent la science des grandeurs et celle de l'étendue) la Mécanique part de principes fondamentaux. Ces principes, nullement évidents par eux-mêmes, sont des vérités qui résultent à la fois de la contemplation raisonnée des phénomènes du monde extérieur et d'une longue suite d'opérations logiques. Les principes de la Mécanique sont donc le résultat d'une synthèse profonde, dont seuls ont été capables quelques génies exceptionnels.

Ces principes établis et formulés prennent un caractère de propositions mathématiques ; par leur forme même, en effet, ils montrent que l'abstraction préalable

et indispensable a déjà été effectuée ; nous reviendrons du reste sur ce point d'une extrême importance. Dès lors, la Mécanique rationnelle est en possession des éléments nécessaires à la constitution de toute science mathématique. Nous disons *Mécanique rationnelle*, parce qu'elle ne s'occupe que d'abstractions, d'êtres de raison, parce que le passage du concret à l'abstrait a été effectué déjà, et parce que le retour ultérieur de l'abstrait au concret sera du domaine de la *Mécanique appliquée*.

Nulle part peut-être ce passage et ce retour ne sont plus délicats ; et cependant nulle part on ne trouve les résultats de la science pure plus utiles et plus précieux quand on en vient aux applications. L'explication de cet apparent paradoxe tient à ce que les abstractions sont assez rapprochées de la nature pour représenter la vérité des faits avec une approximation suffisante ; et que cependant elles s'en éloignent assez pour avoir pu éliminer totalement les causes de complications qui eussent rendu l'étude des phénomènes scientifiquement impossible.

Introduction du temps; la Cinématique. — Le mouvement, nous l'avons précédemment fait remarquer, s'impose en Géométrie ; sans la notion du déplacement des figures, il n'y a plus de science de l'étendue. Mais les mouvements en Mécanique se distinguent de ceux considérés en Géométrie, par l'introduction d'une grandeur nouvelle, le *temps*, dont nous avons tous la notion et qui est indéfinissable par nature. Seulement, comme cette notion est intimement liée à l'ordre de succession des phénomènes, et que nous ne pouvons même la posséder autrement que par cette considération, il s'ensuit que nous sommes en état d'apprécier des temps égaux, employés à l'accomplissement de phénomènes identiques, que nous savons aussi ce que c'est que la somme de deux temps ; dès lors, cette

grandeur, nous pouvons la mesurer, la traduire en nombres et la soumettre au calcul.

Il est donc possible ainsi, comme l'a remarqué Ampère, de faire l'étude des mouvements, en y introduisant la notion du temps, mais sans se préoccuper en aucune manière des causes qui produisent les mouvements que l'on considère. A cette branche de la science a été donné le nom de *Cinématique*; elle comprend l'étude des mouvements des points, et en général des figures géométriques quelconques ; elle considère aussi des éléments nouveaux, tels que les vitesses et les accélérations, dont on ne s'occupe pas en Géométrie.

On a beaucoup discuté depuis près d'un siècle, et surtout au point de vue de l'enseignement, pour savoir quel rang la Cinématique devait occuper dans la Mécanique rationnelle. La vérité, c'est que cette science n'appartient pas directement à la Mécanique. Elle forme non pas un chapitre à part, mais une introduction indispensable, et voici, ce me semble, quelles sont les considérations décisives à l'appui de cette manière de voir.

La Cinématique ne fait appel à aucun des principes généraux de la Mécanique ; c'est une science mathématique pure dans toute la force du terme. Elle emprunte au monde extérieur les mêmes données premières que la Géométrie ; elle y ajoute la connaissance du temps, comme nous venons de le dire ; mais une fois ces éléments traduits en nombres ou en figures, c'est-à-dire tombés dans le domaine de l'abstraction, elle poursuit sa marche logique sans aucun emprunt supplémentaire direct ou indirect à l'expérience et à l'observation.

Il y a plus ; en se plaçant au point de vue des tendances modernes de la Géométrie analytique, on y pourrait faire rentrer la Cinématique de toutes pièces. Il est fréquent, en effet, qu'on étudie les déplacements géométriques qui dépendent d'un paramètre réel. Que

l'on considère ce paramètre, nombre abstrait par nature, comme représentant le temps, et l'étude cinématique se trouve effectuée. Nous ne voulons pas dire que cette méthode doive être suivie en réalité, qu'on le remarque bien. La Cinématique correspond à un ordre d'idées trop important et nouveau, elle touche à trop de questions dont l'intérêt géométrique est secondaire, pour ne pas mériter une place spéciale dans l'ensemble de la Mathématique, soit au point de vue de la classification générale, soit à celui de l'enseignement.

Mais cette place, nous y insistons, est celle que nous venons d'indiquer ; placée entre la Géométrie et la Mécanique rationnelle, l'étude mathématique des mouvements dans le temps et dans l'espace est un complément de la première et une préparation à la seconde. Il est juste de reconnaître qu'après bien des hésitations et des tâtonnements, les savants français semblent aujourd'hui entrer résolument dans cette voie, et que la Cinématique tend à prendre de plus en plus le caractère d'une science ayant sa doctrine, son autonomie et ses moyens propres de recherches.

Le point matériel. — La première des abstractions de la Mécanique consiste dans la considération d'un élément indispensable à la constitution mathématique de la science, mais qui demande une courte explication, à cause du côté paradoxal et un peu arbitraire que cette conception présente en apparence.

Toute portion de matière, si faible qu'elle soit, fût-elle réduite à un atome, occupe une certaine portion de l'espace. Cependant, la Mécanique envisage un point, analogue au point de la Géométrie, c'est-à-dire dépourvu de toutes dimensions, et en lequel on suppose concentrée une certaine quantité de matière. Rien n'oblige même à admettre que cette quantité soit faible; on la prend à volonté, selon les besoins de la question, et l'on considère ce point géométrique comme

jouissant des propriétés qui appartiennent à la matière au point de vue mécanique. C'est à cet élément qu'on a donné le nom de *point matériel.* Ici l'abstraction est poussée à ses dernières limites ; elle n'en est pas moins précieuse pour cela, mais encore une fois, il faut un peu de réflexion pour en reconnaître les bienfaits, et pour ne pas trouver qu'il y a une contradiction (en apparence, je le répète) avec les faits de la nature. L'idée d'un point géométrique ayant autant de matière que mille tonnes, ou même que le soleil, par exemple, surprend un peu. Mais, si l'on réfléchit bien, on verra qu'il n'y a rien là dedans qui soit plus contraire à la nature des choses que le point géométrique lui-même, la ligne droite, et en général les autres abstractions dont s'empare la Mathématique. C'est donc sur les points matériels que raisonnera constamment la Mécanique, et les corps qu'elle étudiera au point de vue des mouvements devront être considérés comme des ensembles de points matériels.

L'inertie et les forces. — L'une des hypothèses nécessaires à la constitution de la Mécanique, bien qu'elle soit également en contradiction avec le spectacle que nous offre le monde extérieur, est celle du repos absolu, qui permet, par l'établissement d'un système fixe d'axes coordonnés, de juger des mouvements des points matériels. Cette hypothèse admise, le principe fondamental de la Mécanique est celui de l'*inertie*; on l'énonce en général sous cette forme : 1° « un point matériel au repos restera au repos s'il n'est soumis à aucune action extérieure ; 2° si un point matériel se meut uniformément en ligne droite, il continuera ce même mouvement tant qu'il ne sera soumis à aucune action extérieure ». Et on le complète en disant : « toute cause extérieure de mouvement ou de modification de mouvement d'un point matériel est une force ».

On a souvent aussi traduit le principe de l'inertie

dimensions; que les angles sont des rapports de longueurs, etc. En Mécanique, nous venons de voir qu'il s'introduit deux grandeurs essentiellement nouvelles, le *temps* et la *masse*, irréductibles par nature, soit entre elles, soit avec les longueurs. Il s'ensuit qu'on est conduit à adopter des unités, d'ailleurs arbitraires, pour mesurer les longueurs, les temps et les masses. Mais une fois ces trois unités fixées, tout en découlera, chacune des autres entités de la Mécanique étant rattachée à ces trois éléments fondamentaux : longueur, temps, masse. C'est ce qu'exprime le tableau suivant, où les symboles L,T,M figurent la longueur, le temps et la masse, et où les exposants représentent les *dimensions* relativement à chacun de ces trois éléments, par extension avec ce qui a lieu en Géométrie :

Longueur	$L^1\ T^0\ M^0$
Aire.	$L^2\ T^0\ M^0$
Volume	$L^3\ T^0\ M^0$
Vitesse	$L^1\ T^{-1}\ M^0$
Accélération	$L^1\ T^{-2}\ M^0$
Force	$L^1\ T^{-2}\ M^1$

Nous nous bornons à ce petit nombre d'exemples; mais cela s'étendrait à la force vive, au travail et à tout le reste.

On comprend donc l'importance de l'établissement définitif des trois unités fondamentales; le système C. G. S. qui est à peu près universellement adopté aujourd'hui, du moins pour les questions de Physique mathématique, consiste, comme l'indiquent ces initiales, à prendre pour unité de longueur le centimètre, pour unité de masse la masse d'un centimètre cube d'eau distillée dans des conditions de température et de pression déterminées, c'est-à-dire le gramme-masse, et pour unité de temps la seconde sexagésimale de temps moyen.

Cette indication très sommaire ne nous a pas semblé être inutile dans un aperçu général, car les questions d'unités sont souvent en Mécanique et en Physique la

source de bien des difficultés, quand on n'est pas en possession des notions primordiales, cependant très simples.

La Statique. — Il peut arriver que sous l'action d'un système de forces, un ensemble de points matériels au repos reste au repos. On dit alors que ces forces se font équilibre, ou que le système est en équilibre.

Sous le prétexte que le repos est plus simple que le mouvement, on a souvent proclamé, et quelques personnes proclament encore aujourd'hui que c'est par cette étude de l'équilibre qu'il convient d'aborder la Mécanique. C'est cette branche de la Mathématique à laquelle on a donné le nom de *Statique*. Telle qu'elle est habituellement constituée, du moins dans ses éléments, la Statique comprend l'étude de l'équilibre d'un point matériel et d'un solide invariable.

Nous croyons, comme pour la Cinématique, que le chapitre de la Statique ainsi comprise doit être soigneusement détaché de la Mécanique rationnelle, dans laquelle il ne peut jeter que trouble et confusion.

Tout d'abord, il paraît assez étrange, après avoir appelé, par définition, force une cause de mouvement, de n'étudier les forces que dans les cas où elles ne produisent aucun mouvement. D'un autre côté, le solide invariable, nouvelle abstraction mécanique qui n'existe pas dans la nature, repose sur une suite d'hypothèses faites sur les solides de la nature et représentant un cas particulier des systèmes matériels. Enfin, la Statique ainsi comprise oblige à une mesure directe des forces, dont la concordance avec les notions de la Mécanique rationnelle est loin d'apparaître directement.

Pour toutes ces raisons, nous estimons qu'il y a lieu de faire de la Statique, dont certaines parties présentent le plus réel intérêt mathématique, un chapitre complémentaire spécial de la Géométrie, sans aucune

attache directe avec la Mécanique, qui en est complètement distincte.

Il suffit pour cela de désigner provisoirement par force un segment de droite de l'espace, ayant une origine et une extrémité bien définies, et qui peut être transporté tout d'une pièce le long de la droite illimitée sur laquelle il est placé (1). L'origine de ce segment sera le point d'application, la longueur sera la grandeur de la force, et en partant de là, on pourra non seulement édifier toute la Statique élémentaire ordinaire, mais encore y ajouter ces notions si intéressantes aujourd'hui éparses, et qui mériteraient si bien de former un corps de doctrine, comme l'a fait observer M. Haton de la Goupillière, sous le nom de *Géométrie des masses*; elles comprennent notamment les centres de gravité et les moments d'inertie.

Le jour où l'on se serait ainsi décidé à faire de la Statique un chapitre de Géométrie pure complémentaire, c'est-à-dire une science exclusivement mathématique, n'empruntant aucune notion à la constitution intime des corps, il deviendrait indispensable d'en proscrire les démonstrations de propositions indémontrables, comme celle du parallélogramme des forces, qui ne repose que sur un amoncellement de sophismes, et dont la vérité, en Mécanique, provient d'un principe fondamental révélé indirectement comme les autres par l'observation. En Statique, il faudrait, par définition et non autrement, appeler *résultante* de deux forces ayant même point d'application la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.

La Statique géométrique, ainsi présentée, et dégagée de toutes les considérations mécaniques qui la dénaturent et l'obscurcissent, serait une préparation utile, mais non pas indispensable, à la Mécanique rationnelle,

---

(1) Il est utile de remarquer que cette dernière hypothèse exclut l'étude de la stabilité.

et lorsqu'on aborderait celle-ci, il ne serait pas difficile de voir la coïncidence entre les forces qu'on y étudie et les êtres de raison purement géométriques désignés antérieurement sous le même nom.

La Dynamique. — La Dynamique est l'étude du mouvement sous l'action des forces. C'est en elle que se concentre en réalité toute la Mécanique rationnelle. Elle se divise tout naturellement en deux parties : Dynamique du point matériel, Dynamique des systèmes.

Avant de dire quelques mots de chacun de ces sujets, qu'il nous soit permis de présenter une observation d'ensemble. La Mécanique se sert de la Mathématique tout entière, de la Géométrie et du Calcul. Mais elle n'est en elle-même ni une science de calcul, ni une science géométrique, malgré son caractère de rationalité. La tendance manifestée par des auteurs assez nombreux, et qui consiste à y chercher l'occasion de problèmes de calcul ou de Géométrie, est donc profondément regrettable, même quand ces auteurs y apportent le plus de talent. Cette science présente assez de difficultés par elle-même, son objet est trop important pour qu'elle s'égare dans des questions latérales et perde ainsi le bénéfice de la situation unique qu'elle occupe dans l'échelle générale des connaissances humaines. Plus on avancera, et plus on arrivera à reconnaître la nécessité de ne pas abandonner un domaine où les progrès purement philosophiques trouvent leur compte, en même temps que les applications pratiques reçoivent également satisfaction.

La Dynamique du point matériel. — L'étude préalable de la Cinématique permet de donner à ce chapitre de la Mécanique un développement modéré, sans qu'il cesse de former un corps de doctrine bien complet. Après un exposé des principes généraux les plus essentiels et l'introduction de la notion de la masse et de celle de la

force, la Dynamique du point matériel se déroule avec une précision et une netteté totales. L'introduction des vecteurs, d'ailleurs pour ainsi dire indispensable en Cinématique, serait de nature à apporter encore ici des simplifications et des clartés nouvelles.

Dans cette étude prennent place : les théorèmes généraux, la théorie des forces centrales, le mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre, et aussi l'étude si importante des mouvements relatifs.

La Dynamique des systèmes. — Autant nous nous sommes élevé contre l'introduction parasite des éléments de Statique dans la Mécanique, autant nous croyons qu'il est utile, pour un exposé méthodique des principes de la Mécanique, de débuter ici par l'étude de l'équilibre, qui se fait à un tout autre point de vue et qui est dominée par le beau théorème du travail virtuel, de Lagrange. On y trouve l'avantage d'une grande unité et d'une simplification des notions qu'on est appelé ensuite à examiner.

Les systèmes libres étant ensuite étudiés au point de vue du mouvement, lorsqu'on aborde les systèmes à liaisons, le principe de d'Alembert vient projeter comme une lueur immense sur toute la science du mouvement et achève de lui donner cette unité qu'elle a acquise, grâce aux efforts de tant de génies incomparables. Les équations de Lagrange apparaissent comme une sorte d'instrument analytique universel permettant d'attaquer, sinon de résoudre définitivement, toutes les questions que l'étude du mouvement pourra soulever. En arrivant ensuite aux solides naturels, il y a une précaution indispensable à prendre : c'est de bien préciser l'étendue des hypothèses; car on ne doit jamais oublier qu'on est et qu'on reste dans la Mécanique rationnelle, et que les prétendus solides naturels ne sont cependant eux aussi que des abstractions nouvelles, moins éloignées de la nature que les solides

invariables de la Géométrie, mais qui cependant n'existent pas plus réellement.

Il nous serait impossible de passer ici en revue toute la série des problèmes auxquels peut s'étendre la Dynamique dans le développement, d'ailleurs indéfini, de ses applications purement théoriques. Les plus remarquables d'entre eux sont peut-être ceux qui concernent l'Astronomie, ou la *Mécanique céleste*, car c'est la seule des sciences naturelles où l'on puisse arriver à une concordance aussi parfaite entre la théorie et les faits réels. Nous devons cependant la regarder, en raison de son caractère même, comme une science appliquée, et nous aurons à en dire plus loin quelques mots à ce titre.

Ce que nous voulons seulement indiquer en terminant ce paragraphe, c'est l'infinie diversité des résultats et aussi l'unité de méthode qui caractérisent cette partie de la science depuis les immortels travaux de d'Alembert, de Lagrange et de leurs continuateurs.

Les limites de la Mécanique. — Il est un écueil à éviter, et que malheureusement on n'évite pas toujours. Autant il est funeste, comme nous l'avons dit, de chercher dans la Mécanique un prétexte à problèmes de Mathématique ordinaire, autant il deviendrait dangereux d'y incorporer des chapitres qui ne lui appartiennent pas. Dans presque toutes les branches de la Physique aujourd'hui, on fait usage dans une mesure plus ou moins étendue de la Mathématique. De là est souvent résultée une tendance à vouloir introduire dans la Mécanique et soumettre à ses méthodes des questions et des théories auxquelles elle est incapable de s'appliquer, du moins aujourd'hui.

Sans que les limites puissent être tracées d'une manière absolue, il est nécessaire de laisser à la Physique, d'une façon générale, la série des questions pour lesquelles une intervention directe et permanente de l'expérience est nécessaire.

La chaleur, la lumière, l'électricité, la constitution moléculaire des corps, par exemple, appartiennent incontestablement à la Physique, bien que la Mathématique puisse souvent leur être appliquée de la façon la plus utile. Plus tard peut-être, quand de nouveaux progrès auront été réalisés, quand les hypothèses auront fait place à d'indiscutables vérités que nous ignorons aujourd'hui, certains chapitres de la Physique pourront-ils tomber dans le domaine de la Mécanique; mais nous n'en sommes pas là.

Le danger principal d'une telle confusion serait d'enlever à la Mécanique le caractère de haute précision et de rigueur qui en fait une science impeccable, alors que ses applications sont si rapprochées de la vérité naturelle, c'est-à-dire des faits. Ceci tient à ce que les hypothèses générales sur lesquelles ses abstractions sont construites sont en petit nombre d'une part, et que de l'autre ces hypothèses sont elles-mêmes fort peu éloignées de la réalité. Or, si l'on se condamnait à agir de même en Physique, on couperait court à tout progrès. La liberté la plus large dans les explications est la condition première de la marche en avant. La théorie de l'émission en lumière, celle des deux fluides en électricité, ont eu leur raison d'être et ne sont pas déjà si anciennes. Où en serions-nous si, bâtissant sur ces théories quelques chapitres de la Mécanique rationnelle, il nous fallait aujourd'hui les jeter au feu comme d'inutiles erreurs! L'erreur est en Physique une route ouverte vers la vérité; c'est par de perpétuels tâtonnements qu'on avance; il n'en va pas de même dans une science mathématique telle que la Mécanique rationnelle; et nous croyons possible, en s'appuyant sur ces idées générales, de tracer avec une précision suffisante les limites du domaine de la Mécanique.

LA MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE

PHILOSOPHIE

CHAPITRE PREMIER

Considérations générales.

Le mot *applications* peut être compris scientifiquement, et surtout en Mathématique, de deux manières très distinctes. Lorsqu'une proposition ou même une théorie nouvelle a été établie, on est conduit, pour montrer que ce n'est pas uniquement d'une vérité isolée qu'il s'agit, à l'appliquer à un certain nombre de questions, soit pour résoudre des problèmes, soit pour en déduire encore d'autres propriétés. Les applications de cette nature font partie intégrante de la Mathématique pure ; elles y sont pour ainsi dire incorporées, et l'on ne saurait comprendre la constitution d'une branche quelconque de la Mathématique, qui ne contiendrait pas d'applications.

Ce n'est donc pas de ces applications-là, dont la Géométrie analytique en particulier offre le plus frappant et le plus considérable des exemples, que nous voulons maintenant nous occuper ; nous en avons dit tout ce qu'il nous semblait nécessaire d'en dire. Mais les résultats obtenus par la Mathématique pure, sous toutes ses formes et dans tous ses domaines, peuvent être utilisés pour résoudre les questions que présente à nous le monde réel. Qu'il s'agisse de problèmes pra-

tiques dont la solution nous est demandée par les conditions mêmes de la vie, ou d'une simple satisfaction intellectuelle, dès que nous quittons le domaine des abstractions pures pour aborder celui de la nature, des faits, nous sommes par cela même dans la *Mathématique appliquée*.

On pourrait ainsi, d'une façon à peu près satisfaisante, définir cette dernière, la partie de la Mathématique qui a pour objet d'effectuer le retour de l'abstrait au concret.

La Mathématique appliquée se subdivise par conséquent en une foule de branches, suivant la partie de la science pure dont elle fait usage, et aussi suivant la nature des questions qu'il s'agit d'étudier et de résoudre. Nous ne saurions avoir la prétention de les passer toutes en revue, d'autant plus que chaque jour peut voir éclore une science mathématique appliquée nouvelle. Nous ne nous arrêterons au contraire dans les pages qui suivront, et à titre d'exemples, que sur celles de ces sciences qui présentent un intérêt spécial au point de vue de la méthode et des idées générales.

La très grande majorité de ces sciences d'application concerne des sujets qui ont une utilité pratique évidente, et il faut bien remarquer qu'on rencontre dans la constatation de ce fait la véritable origine de la Mathématique. Dès que l'homme s'est trouvé sur la terre, en possession de son intelligence et appelé à lutter contre toutes les forces de la nature, en apparence coalisées contre lui, il lui a bien fallu s'armer pour cette lutte; et, sans que la maxime fût exprimée, il s'est nécessairement convaincu de cette vérité « qu'on ne triomphe de la nature qu'en obéissant à ses lois ». D'un autre côté, dès que les relations sociales entre individus ou entre nations commencèrent à s'établir, les échanges, l'évaluation de la surface des champs soulevèrent des problèmes qui imposaient l'obligation de compter et de mesurer. L'Astronomie, imposée pour ainsi dire à l'hu-

manité par le spectacle permanent qu'elle nous offre, présentait en outre dans ses conséquences une utilité pratique qui saute aux yeux ; or, on n'a pu y faire quelques progrès que du jour où les premières notions de Géométrie et de calcul intervinrent.

Il n'est pas besoin d'insister davantage pour établir que c'est le besoin, que ce sont les nécessités du milieu ambiant qui ont provoqué la création de la Mathématique, et déterminé les abstractions sans lesquelles cette science eût été impossible. Mais aussitôt les premières fondations de l'édifice établies, le problème ne tarda pas à changer d'aspect. L'homme s'aperçut que dans la recherche de la vérité pour elle-même il y a des satisfactions intimes de l'esprit, entièrement indépendantes de toute préoccupation d'applications ultérieures. Il reconnut en outre que la plus énergique incitation à la recherche, le plus puissant des instruments de progrès était précisément ce besoin de découverte, poussé à de si hautes limites dans quelques esprits. De là suivait une conséquence : c'est que les sciences d'application se trouvaient pour ainsi dire d'autant mieux pourvues que les savants s'étaient moins préoccupés de les pourvoir, si étrange et paradoxal que cela puisse sembler.

Dans tous les cas, au point où en est arrivée aujourd'hui la culture intellectuelle dans le monde civilisé, la question ne se pose même plus et ne saurait se poser ; tout au plus est-elle soulevée de loin en loin par quelques personnes d'une ignorance totale en Mathématique, et n'ayant même pas la notion de ce qui constitue la science en général. La question « A quoi cela peut-il servir ? » est en matière de science la plus folle et la plus vaine qui se puisse poser. La meilleure de toutes les réponses à y faire est : « Qu'en savons-nous ? » Lorsque les géomètres grecs poursuivaient leurs patientes et admirables investigations sur les propriétés des sections coniques, pouvaient-ils supposer, et un seul de leurs contemporains pouvait-il supposer qu'un jour

Kepler s'en servirait pour découvrir les lois des mouvements des corps célestes ; que Newton en déduirait la gravitation universelle ; que toute l'Astronomie moderne sortirait de là, et que la Géographie et la Navigation seraient appelées à recueillir le bénéfice des méditations de ces rêveurs.

Mesurer une science à son utilité est presque un crime intellectuel. Mais quand la science est faite, que des chercheurs y trouvent ce qui est utilisable au point de vue des applications, ceci est une autre affaire. Que le mathématicien lui-même abandonne momentanément ses recherches purement abstraites pour mettre à la disposition de ses contemporains un ensemble de vérités dont on peut dès à présent tirer des applications concrètes, en le faisant, il complète sa tâche et montre une fois de plus que la science, si elle constitue primitivement une satisfaction de l'esprit, n'a pas oublié son origine première et conserve son utilité.

Dans cet ordre d'idées, il me sera permis de citer un exemple contemporain et de rappeler un souvenir. Parmi toutes les nations du monde, il n'en est assurément pas une plus intéressante que les États-Unis d'Amérique, au point de vue du développement rapide qu'a pris ce pays, des progrès prodigieux de son industrie, de l'énergie et de l'initiative dont il a fait preuve. Mais tant d'activité obligée, imposée à un pays neuf par les conditions de son existence, se conciliait mal avec des recherches purement théoriques, avec la poursuite sentimentale de la vérité pure. Aussi le nombre des mathématiciens américains a-t-il été longtemps des plus réduits. Il y a environ vingt-cinq ans, mon ami regretté J. Houël, l'un des savants les plus instruits de son temps, et dont l'érudition mathématique était immense, m'entretenait dans une de ses lettres de la situation mathématique des diverses nations et arrivait à cette phrase typique, dont je n'ai jamais perdu le sou-

venir : « Quant aux États-Unis, ils importent juste la quantité de science pure qui est nécessaire à leur industrie. »

C'était très exact alors. Depuis cette époque, un savant anglais, Sylvester, mort il y a peu de temps, fut appelé à professer à Boston ; il y fonda un important journal mathématique, et provoqua une sorte de révolution intellectuelle à ce point de vue, en quelques années seulement. Aujourd'hui, la *Société mathématique américaine* de New-York comprend à peu près le même nombre de membres que la *Société mathématique de France*. La Mathématique, sous toutes ses formes et dans toutes ses parties, est professée dans de nombreuses Universités, traitée dans une foule de publications et cultivée par des savants qui ne le cèdent en rien à leurs confrères d'Europe. Elle n'est plus un objet d'importation emprunté à l'ancien monde ; c'est devenu un article essentiel de la production nationale, et cette production augmente chaque jour, comme importance et comme quantité. Ce phénomène s'est accompli, je le répète, en un très petit nombre d'années ; et il est assez curieux pour valoir la peine d'une indication.

Malgré ce développement extraordinaire, et peut-être à cause de ce développement, l'industrie américaine n'a rien perdu de son activité, bien au contraire ; elle prend à tâche, et parfois avec une sorte de fièvre, de transporter les résultats de la science pure dans le domaine des applications dès qu'elle les juge utilisables ; et c'est par centaines que l'on pourrait compter les publications américaines s'occupant chaque jour, sous une forme ou sous une autre, de Mathématique appliquée.

C'est tout naturellement dans l'art de l'ingénieur que ces applications, là-bas comme partout, trouvent surtout leur emploi. L'ingénieur, d'une façon générale, est l'homme qui est appelé par sa profession à résoudre des questions pratiques, où la connaissance des

naturelles est nécessaire. Il emprunte à toutes les sciences pures, Mathématique, Physique, Chimie, Biologie, etc., et la Mathématique est notamment pour lui un instrument indispensable. Il ne saurait, en général, être mathématicien; sauf de rares situations exceptionnelles, les conditions de sa profession, les obligations qui en résultent, se concilient mal avec les recherches longues et patientes qu'exige la conquête de la vérité pure; il lui faut parfois improviser les solutions, faire preuve de coup d'œil, tel un général sur le champ de bataille. Mais cependant une éducation mathématique préalable est indispensable à l'ingénieur, et il lui faut avoir aussi l'esprit mathématique s'il veut rester à la hauteur de sa tâche.

Il lui doit surtout d'être pénétré de la nécessité de l'abstraction et de comprendre sous quelles conditions peut s'effectuer le passage de l'abstraction à la réalité. Ces connaissances sont peut-être moins universellement répandues qu'on ne l'imagine ; il n'est pas rare de rencontrer des ingénieurs, d'ailleurs fort intelligents et distingués, pour vous dire qu'ils ont totalement oublié ce qu'ils ont su jadis en Mathématique ; que de tous les éléments péniblement acquis autrefois, ils n'ont jamais occasion de faire usage ; et pour conclure que les connaissances mathématiques sont plutôt un moyen de sélection imposé dans les concours, que les bases d'une éducation professionnelle effective. Je n'entends jamais ce langage sans en concevoir une profonde tristesse ; je n'y peux voir que le reflet d'un enseignement incomplet et mal coordonné, qui arrive en fin de compte à des dépenses intellectuelles énormes, pour ainsi dire totalement perdues.

Certes, il n'est pas indispensable à l'homme chargé de construire un barrage ou une machine à vapeur de se rappeler la démonstration d'un théorème d'Algèbre particulier ou de résoudre tel problème de Géométrie analytique. Mais dans les raisonnements qu'il est con-

traint de faire, dans les résultats numériques qu'il doit appliquer, il se trouvera exposé aux plus cruels mécomptes s'il a perdu la notion des méthodes mathématiques, s'il n'est pas en état de faire la comparaison entre les abstractions pures et les réalités concrètes qui sont sous ses yeux, et de juger des conditions sous lesquelles celles-ci sont sans inconvénient applicables à celles-là.

Aucun résultat mathématique n'est vrai, à proprement parler, quand on l'applique au monde réel, puisqu'il porte sur d'autres objets que ceux du monde réel ; mais un tel résultat est un premier guide, et un guide très utile, parce qu'il indique toujours une approximation. Cette approximation est précieuse, surtout si l'on peut en connaître les limites. On peut et on doit corriger les erreurs par l'appel à l'expérience, les comparaisons avec ce qui a été fait précédemment dans des cas analogues, et aussi par l'intervention du bon sens et de la sagacité personnelle. Mais on perdrait le meilleur des appuis si l'on était seulement réduit à des ressources de cette nature.

Dans les applications, une erreur n'est dangereuse que lorsqu'on l'ignore. Prévenu, on est en garde contre elle ; et si on en connaît les limites, elle devient au contraire un bienfait.

Cet ordre d'idées m'amène à insister dès à présent sur une idée générale qui paraît relever du calcul, mais dont la portée est beaucoup plus vaste : celle des *approximations*.

On introduit parfois, il est vrai, soit en Arithmétique, soit en Algèbre, un chapitre particulier sur les approximations; mais, surtout dans l'enseignement, point spécial sur lequel j'aurai à revenir plus loin, on n'établit généralement aucun lien entre cette étude et toutes les questions sur lesquelles elle réagit. On n'en cherche pas les conséquences et l'on n'en poursuit pas les ana-

logies dans la science de l'étendue. Enfin, et ceci est plus grave encore que tout le reste, on donne à cette étude un caractère exclusivement abstrait, ce qui la dénature et lui enlève sa principale utilité. Il y a lieu d'ajouter aussi, comme nous le prouverons, que le reste de l'enseignement, dans plusieurs de ses parties, révèle un mépris complet de ces notions péniblement acquises.

En n'accordant pas à la théorie des approximations la place qui lui appartient dans le domaine du concret, en ne l'appliquant pas à l'étendue, en négligeant d'en faire usage pour toutes les questions simples qui se présentent, on est arrivé, peu à peu, à infuser de plus en plus dans l'esprit de ceux qui cultivent superficiellement la Mathématique cette idée fausse que c'est la science de l'absolu. Il n'est pas surprenant, avec une pareille conception *a priori*, qu'on aille au-devant des déceptions ; mais il est bien injuste de mettre à la charge de la science les conséquences de la conception vicieuse qu'on s'en est faite.

Babinet, dans l'Avertissement de ses *Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation*, rapporte une anecdote qui nous paraît bien instructive en cette matière, sous sa forme humoristique. Je cite : « A quoi bon, disais-je à l'illustre Dulong, mettre sept ou huit décimales dans le rapport de réfraction relatif aux phénomènes de la double réfraction, tandis que déjà les déterminations expérimentales ne s'accordent pas entre elles dans la troisième décimale ? — Il me répondit avec une gravité ironique : Je ne vois pas pourquoi on supprimerait les dernières décimales ; car si les premières sont fausses, peut-être les dernières sont-elles justes ! »

Une saine appréciation des approximations nous semble donc être la condition essentielle, fondamentale de toute branche de la Mathématique appliquée. D'après ce que nous avons dit plus haut, cette notion doit être complétée par une connaissance approfondie

des objets concrets sur lesquels on raisonne. Ici, la nécessité n'existe plus d'établir les vérités de Mathématique pure dont on a besoin. Ces vérités sont à pied d'œuvre; il reste à les utiliser; pour cela, il convient de les transporter dans le domaine concret, avec une discussion qui aura pour résultat de montrer dans quelles limites seront circonscrites les erreurs résultant de cette opération; autrement dit, sur quelles approximations il sera possible de compter.

Cette discussion est chose souvent délicate et difficile; elle exige l'intervention de la pratique et de l'expérience, le rapprochement avec des résultats fournis par d'autres sciences que la Mathématique. Il est permis, ce qui serait une monstruosité en Mathématique pure, de considérer ici un résultat approché comme très supérieur à un résultat rigoureusement exact, si le premier est par sa nature mieux adapté à l'objet qu'on a en vue, et si en somme l'erreur finale, au point de vue pratique, est inférieure à celle qu'aurait produite la solution mathématique absolue.

On se rend compte, d'après ces observations d'ensemble, des difficultés que présente la Mathématique appliquée, et en général ce retour de l'abstrait au concret sans lequel un problème de philosophie naturelle n'est jamais complètement traité. Ces difficultés, variables avec les sujets qu'on a en vue, ne sont pas au-dessus des forces de la science, mais elles exigent un développement particulier des facultés mathématiques, en harmonie avec les nécessités du monde extérieur. De grands progrès, dans la Mathématique appliquée, ont été faits déjà; mais ils doivent compter pour peu de chose en regard de ceux qu'il reste à accomplir.

CHAPITRE II

L'application du Calcul.

Il n'est pas nécessaire d'insister sur l'universalité des applications du Calcul. Depuis la cuisinière qui fait ses comptes de ménage jusqu'à l'astronome qui accumule d'immenses travaux pour mesurer et déterminer les mouvements des corps célestes, la nécessité des opérations arithmétiques et du Calcul en général s'impose partout. Si, par une fatalité déplorable autant qu'impossible, tous les individus qui composent l'humanité se trouvaient tout d'un coup dépossédés de leurs connaissances en cette matière, le monde tomberait subitement dans un état de profonde barbarie, eussions-nous conservé nos autres aptitudes en matière de littérature et d'art, et toutes nos facultés imaginatives en général.

Il est bien clair cependant que la nécessité dont nous parlons, si elle s'impose à tous, s'impose à des degrés fort divers. Et s'il est indispensable au dernier des manœuvres de connaître au moins la pratique de quelques opérations élémentaires, il n'y a par contre qu'un très petit nombre de personnes ayant occasion de mettre en usage les fonctions elliptiques par exemple.

Nous pourrions donc remplir un volume entier, rien qu'en passant successivement en revue les circonstances où les diverses sciences ayant le Calcul pour objet

uvent s'appliquer, [illegible]
us une forme sommaire, [illegible]
athématiques nécessaires dans [illegible]
Nous préférons, conformément à la [illegible]
squ'ici, nous en tenir à de rapides [illegible]
ns préoccupé des principes que du [illegible]
ulement de quelques exemples [illegible]
us avons à présenter.

Dans les innombrables [illegible]
faire des calculs numériques [illegible]
arrive fréquemment que [illegible]
pètent d'une façon très [illegible]
fficulté, non pas théorique, [illegible]
la perte matérielle de [illegible]
l'utilité des tables [illegible]
esentent de nombreux [illegible]
cela serait possible, et [illegible]
Parmi ces tables, [illegible]
ultiplication, permettant [illegible]
s nombres jusqu'à [illegible]
s applications [illegible]
ême en dehors des [illegible]
rce que les [illegible]
simplifier [illegible]
us grands. En [illegible]
igé pour les [illegible]
nt guère [illegible]
On leur a [illegible]
[illegible]

à faire gagner du temps sur celui qu'on emploie à la manipulation matérielle des calculs est un grand bienfait.

Pour les cas particuliers, pour certaines questions qui reviennent constamment sous les mêmes formes, on a donné aussi de nombreuses tables numériques dont l'usage est continuel. Dans l'art de l'ingénieur, les exemples fourmillent; on en trouve un autre dans les calculs d'intérêts et surtout d'intérêts composés, où des tables bien comprises ramènent à la solution d'une proportion très simple des questions, qui sans ce secours présenteraient une certaine complication.

A côté de leurs mérites, les tables cependant ont souvent produit un résultat dont il n'y a pas lieu de se féliciter. A force d'en faire usage, beaucoup en sont arrivés à s'imaginer que la connaissance du Calcul devient sans objet, et qu'il est bien inutile de se donner une peine que d'autres se sont donnée pour vous en construisant les tables dont vous faites usage. C'est là une des causes de ce délaissement de la Mathématique, signalé plus haut, par un trop grand nombre d'ingénieurs.

Une semblable idée, cependant, est radicalement fausse. Une table numérique bien faite, quel qu'en soit l'objet, est un outil précieux, mais ce n'est qu'un outil; et l'on n'arrivera jamais à en faire usage d'une façon efficace et sûre si l'on ne possède pas à fond le maniement de cet outil, si l'on ne sait pas comment il a été fabriqué, dans quelles limites il est permis d'en faire usage, et quelles sont les précautions à prendre pour s'en servir.

En dehors de ces tables particulières, il en est d'autres auxquelles nous devons nous arrêter quelques instants, tellement elles rendent de services, tellement elles sont rigoureusement indispensables dans toute la Mathématique appliquée. Nous voulons parler des tables de logarithmes, merveilleuses entre toutes puis-

qu'elles permettent de substituer aux multiplications de simples additions, aux divisions des soustractions, et, comme conséquence, de calculer avec une extrême facilité les puissances d'ordres quelconques ou les racines d'indices quelconques des nombres sur lesquels on peut avoir à opérer.

Les tables de logarithmes présentent peut-être le plus simple et le plus frappant exemple du lien qui réunit les questions pratiques courantes aux spéculations élevées de la science pure. La découverte des logarithmes, c'est-à-dire des fonctions jouissant des belles et utiles propriétés que nous connaissons tous aujourd'hui, se rattache au fond au Calcul infinitésimal; elle touche étroitement à l'étude d'une équation différentielle, et il est peu probable que Neper y ait été conduit par d'autres considérations qu'un ardent désir d'accéder à la vérité; et cependant, cette découverte a été la source d'avantages pratiques sur lesquels il serait puéril d'insister.

C'est sous deux formes distinctes que se présentent les tables de logarithmes d'un usage courant, et qui sont devenues très nombreuses. Elles fournissent d'abord les logarithmes des nombres, soit de 1 à 10000, soit dans des limites plus étendues; et puis, dans une seconde partie, elles donnent les logarithmes des fonctions circulaires : cosinus, sinus, etc. Il est permis à ce sujet d'éprouver deux regrets : le premier, c'est que l'usage des fonctions dont il s'agit ne soit pas accompagné de celui des fonctions hyperboliques, dont l'étude est aussi simple, et dont l'utilité est presque aussi grande dans une foule de questions; le second, c'est qu'on ait renoncé, en outre des logarithmes, à se servir de tables donnant les valeurs elles-mêmes des fonctions (circulaires ou hyperboliques), ou, comme l'on dit quelquefois, les *valeurs naturelles* de ces fonctions.

Les tables de logarithmes se présentent sous un assez grand nombre de dispositions différentes; on a

pris à tâche de leur donner un grand caractère de clarté, permettant d'éviter autant que possible les fautes matérielles de lecture. Mais elles se distinguent surtout les unes des autres par le nombre des décimales avec lequel les logarithmes y sont calculés. Il est bien évident que l'approximation atteinte sera d'autant plus grande (car les calculs par logarithmes ne sont que des approximations) que ce nombre de décimales sera plus grand. Ceci appelle une observation d'ordre général. Lorsqu'on veut arriver à un résultat, il faut proportionner ce résultat aux instruments dont on se sert et ne pas demander plus que ce qu'ils peuvent donner. Or, dans toutes les conditions ordinaires de la pratique, dans l'art de l'ingénieur, en particulier, le calcul des logarithmes avec 5 décimales, et même avec 4, suffit largement aux besoins. Dans certaines questions d'Astronomie ou de Physique mathématique, on peut avoir recours utilement à beaucoup plus de décimales ; mais en dehors de ces cas exceptionnels il n'en est pas ainsi. Dès lors, l'usage des tables à 7 décimales, par exemple, qui sont assez répandues, devient dans la pratique une inutilité, et pis encore. S'il s'agit de trouver une longueur sur le terrain, par exemple, que cette longueur ait une vingtaine de kilomètres, et qu'on la calcule avec le secours d'une table de logarithmes à 7 décimales, on pourra l'obtenir à 1 centimètre près ; or, si les moyens matériels de mesure employés laissent possible une erreur en plus ou en moins d'un mètre ou deux sur une vingtaine de kilomètres, l'approximation extrême qu'on a obtenue n'est qu'une chimérique apparence, et un leurre en même temps, car il s'ensuit une confiance injustifiée en des résultats que l'expérience ne vient pas confirmer.

On ne saurait donc assez conseiller à tous les praticiens qui ont à faire usage des logarithmes, de choisir leurs tables de manière à les mettre en concordance avec la moyenne des approximations possibles ou dési-

rées. Ils agiront sagement aussi en s'habituant peu à force de se servir des tables de logarithmes, ce que c'est qu'un logarithme, s'ils ne veulent pas être les esclaves et les victimes de l'instrument qu'ils emploient et qu'ils doivent diriger.

Nous ne saurions abandonner ce sujet sans dire un mot des instruments logarithmiques de calcul, qui peuvent rendre tant d'utiles services dans la pratique et permettent, avec un peu d'habileté facile à acquérir, d'obtenir des approximations bien supérieures à ce qu'on pourrait supposer. Ces petits appareils si simples, soit sous la forme de règles, soit sous celle de cercles, devraient être universellement répandus parmi ceux qui ont à appliquer et à pratiquer le Calcul. Beaucoup d'ingénieurs, du reste, en font un constant usage.

Ce n'est pas seulement de la fonction logarithmique, ainsi convertie en tables ou en instruments, que les sciences d'application peuvent avoir à faire usage. À tout instant, et de la manière la plus inattendue, la question de l'étude d'une fonction particulière se présente et exige la mise en œuvre des connaissances d'Algèbre ou de Calcul infinitésimal de nature à rendre possible cette étude. Nous ne faisons même pas allusion ici à l'emploi possible des fonctions elliptiques assez peu répandu encore; nous voulons simplement parler de questions beaucoup plus élémentaires et d'un usage fréquent. La méthode des représentations graphiques présentera souvent dans cet ordre d'idées d'immenses avantages; elle permet de se rendre rapidement compte, par un dessin ou même par un simple croquis, des variations de la fonction qu'il s'agit d'étudier; de résoudre grossièrement, et à vue, les équations qui nous intéressent, et d'ébaucher ainsi les problèmes pratiques par une approximation, évidemment insuffisante, mais qui constitue néanmoins une excellente préparation à la solution définitive. La Météoro-

logie a beaucoup contribué à populariser ce genre de représentation des fonctions, par les tracés divers que reproduisent maintenant chaque semaine un grand nombre de publications.

Nous voyons déjà le Calcul apparaître sous des formes bien diverses dans la pratique de la vie, d'après ce qui précède. La connaissance des opérations arithmétiques, pour ne parler que d'un usage tout à fait évident, est indispensable en comptabilité. Mais ce n'est pas seulement à cela que peuvent se borner les services rendus par la Mathématique en cette matière. Plusieurs mathématiciens, et quelques-uns parmi les plus illustres, ont pris à tâche, en s'inspirant de principes logiques et rationnels, de construire une méthode de tenue de livres mieux coordonnée que celles qui sont actuellement en vigueur et dont l'origine est plus ou moins empirique. Sous le nom de *Logismographie*, ces recherches ont même commencé à prendre le caractère d'une doctrine nouvelle ; et il est à espérer que la Mathématique trouvera là encore, un jour ou l'autre, une occasion d'ajouter un service nouveau à ceux qu'elle a déjà rendus.

Il est une branche des sciences économiques, la Statistique, qui est obligée de faire aussi constamment appel aux ressources du calcul ; elle y a ajouté avec grand profit, depuis un certain nombre d'années, l'intervention des méthodes graphiques sous bien des formes différentes. Mais ce n'est pas à la seule Statistique qu'on a tenté de faire application du calcul dans le domaine des sciences économiques et démographiques. Il y a bien des années déjà que furent poursuivies des études, notamment par M. Walras, de Lausanne, ayant pour objet de faire rentrer l'économie politique dans les sciences auxquelles la Mathématique peut s'appliquer. Si ces essais n'ont pas toujours

donné des résultats sur lesquels tout le monde soit d'accord, il faut s'en prendre surtout aux sujets eux-mêmes qui, plus d'une fois, par leur nature, prêtent à controverses et n'offrent pas scientifiquement un caractère de solidité suffisant. Il faut dire aussi que parmi les économistes quelques-uns sont peu préparés à un traitement mathématique des questions dont ils s'occupent. Cependant, les tentatives dont nous parlons n'ont pas été abandonnées, loin de là, et dans certains cas particuliers, cette application mathématique nouvelle n'a pas été dépourvue d'intérêt. On a même donné un nom, la *Chrématistique*, à l'application générale de la Mathématique aux sciences économiques et sociologiques.

Dans cet ordre d'idées, il est un domaine spécial dont la Mathématique a pris possession d'une façon souveraine, pour y faire application d'une science dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici : le Calcul des probabilités. Il s'agit des assurances, et notamment des assurances sur la vie, qui ne sauraient exister en dehors de l'application constante du Calcul.

Le Calcul des probabilités affecte en soi les apparences d'une science pure et fait appel dans quelques-unes de ses parties aux notions mathématiques les plus élevées et les plus difficiles. Mais il convient de lui laisser sa place dans la Mathématique appliquée, à cause du rôle fondamental que joue l'expérience dans les hypothèses premières. Là, il ne s'agit plus seulement d'abstractions effectuées d'après une observation antérieure ; on se propose d'étudier des événements sur l'arrivée et l'ordre de succession desquels nous ne savons rien, mais que nous *supposons* également probables. C'est à la fois plus et moins qu'une abstraction ; et une telle méthode ne peut avoir quelque valeur dans les résultats qu'elle présente, que par une continuelle intervention de l'expérience venant à l'appui de l'hypo-

thèse primitive. C'est ce qui se produit à un très haut degré dans les assurances, et cela tient au nombre considérable des observations faites. Aussi la pratique est-elle venue donner un éclatant démenti à Auguste Comte, qui s'était cruellement trompé sur les probabilités, déclarant cette conception philosophique « radicalement fausse et susceptible de conduire aux plus absurdes conséquences ».

Le Calcul des probabilités trouve également son application dans les questions concernant les jeux de hasard, et aussi dans des problèmes relatifs au tir des armes portatives ou de l'artillerie.

S'il est une branche, dans la Mathématique, qui paraisse se refuser à toute application pratique et destinée seulement à la satisfaction de l'esprit, c'est assurément la Théorie des nombres. S'imaginer qu'il en est ainsi serait cependant une erreur. Certaines séries numériques, telles que les suites de Farcy et de Brocot, sont le résultat de recherches faites sur des combinaisons d'engrenages au point de vue du nombre des dents. D'un autre côté, et dans une branche industrielle très différente, Ed. Lucas a montré tout l'intérêt qu'offrait la théorie des nombres premiers pour la composition des *armures* de tissus. Il a même publié plusieurs mémoires très dignes d'intérêt sur la *Géométrie du tissage*. Je me souviens qu'il me disait un jour avoir personnellement connu un industriel, d'ailleurs fort intelligent, mais n'ayant aucune notion de Théorie des nombres, qui, ayant été conduit à l'étude de certaines questions pratiques concernant le tissage, avait ainsi retrouvé plusieurs propriétés intéressantes des nombres.

Je ne saurais me dispenser, en terminant ce chapitre, de mentionner au moins *les machines à calculer*, ces appareils précieux destinés à abréger le temps inutilement employé, non plus par des approximations, comme

le font les logarithmes, mais en effectuant mécaniquement les opérations sur les nombres entiers. Ce problème difficile a tenté le génie de Pascal. De grands géomètres, tels que Tchebycheff, parmi nos contemporains, n'ont pas dédaigné de s'en occuper depuis. Parmi ces très nombreux appareils, dont le défaut général, et peut-être obligé, est une trop grande complication, il en est un, l'arithmomètre Thomas, dont l'usage est très répandu et qui présente de grandes qualités pratiques. La plupart des compagnies d'assurances, certaines grandes administrations financières ou statistiques se servent quotidiennement de l'arithmomètre.

Enfin, il serait injuste de passer sous silence les inventions d'un savant qui paraît doué d'une aptitude véritablement exceptionnelle dans ce genre de recherches, M. Henri Genaille. Les réglettes à calcul qu'il a publiées jadis, en collaboration avec Ed. Lucas, sont une véritable merveille d'ingéniosité, même au point de vue purement scientifique, en dehors de l'intérêt pratique réel qu'elles présentent. Elles donnent à vue les produits d'un nombre quelconque par un multiplicateur d'un chiffre. Depuis lors, les recherches de M. Genaille ont fait l'objet de nombreuses et intéressantes communications; et nous croyons savoir que si d'aussi utiles inventions n'ont pu pénétrer jusqu'ici dans la pratique et rendre les grands services qu'on en peut attendre, la faute n'en est pas à l'inventeur. Peut-être, dans quelques siècles, et lorsque ces appareils auront été construits depuis longtemps au delà des frontières, reviendront-ils en France, et seront-ils appréciés comme ils méritent de l'être... par nos petits-neveux!

CHAPITRE III

L'application de la Géométrie.

S'il faut s'en rapporter à l'origine du mot « Géométrie », le but que l'on poursuivit primitivement dut être celui de mesurer la Terre, ou plus probablement « les terres », c'est-à-dire la surface des champs. Aujourd'hui encore, la détermination de cette mesure n'est pas la moins intéressante des applications pratiques de la Géométrie. L'*Arpentage* ne paraît donner lieu qu'à l'emploi de propositions fort simples de Géométrie plane. On y trouve cependant, et d'une façon fréquente, l'occasion d'utiliser d'intéressantes propriétés des figures, si l'on cherche à opérer avec la plus grande économie de temps et de peine, sans rien sacrifier de la rigueur. Il faut nécessairement une certaine habileté pratique, un apprentissage consommé dans le maniement des appareils et la mise en œuvre des procédés en cours ; mais ce n'est pas de ce côté de la question que nous nous occupons ; en supposant une égale habileté, l'arpenteur qui possède des notions géométriques précises et sûres aura toujours une incontestable supériorité sur celui qui en est dépourvu. Certaines difficultés surgissent qu'on n'avait pas prévues ; certains problèmes s'imposent; et ce n'est pas exagérer que d'affirmer que les notions de la Géométrie moderne elles-mêmes peuvent souvent trouver ici à s'utiliser. Du reste, l'un

des services publics les plus importants en France, et qui se rattache à cette catégorie d'applications, celui du cadastre, compte des hommes qui sont des ingénieurs de beaucoup d'instruction et de mérite, pourvus de fortes et sérieuses connaissances de Mathématique pure, du moins parmi celles qui se rapportent à leurs fonctions.

Dans cette question de l'Arpentage, il y a plus que jamais occasion de mettre en œuvre le principe sur lequel nous insistons si souvent, c'est-à-dire de proportionner l'approximation que l'on poursuit à la puissance des moyens mis en œuvre et à la nature pratique des questions. Celui qui évaluerait l'aire d'un champ de quelques hectares en se trompant d'un are ou deux serait un piètre arpenteur; mais celui qui prétendrait la déterminer à un millimètre carré près serait un fou.

La même observation s'applique aux questions de *cubage*, qui sont l'application directe de la Géométrie de l'espace aux mesures, dans des conditions analogues à celles de l'Arpentage pour les aires planes. Les moyens mathématiques permettant de déterminer le volume d'un fil métallique de la finesse d'un cheveu, ou celui d'une tour cylindrique de 50 mètres de hauteur, sont assurément les mêmes. Mais le retour de l'abstrait au concret s'opère dans des conditions totalement différentes dans les deux cas et nécessite l'intervention de qualités mathématiques nouvelles, et surtout d'une faculté générale de raisonnement.

Mesurer la surface terrestre, dans l'une de ses portions, ne suffit pas pour un grand nombre d'applications. Il nous faut en outre la représenter, c'est-à-dire pouvoir en donner une image fidèle. Cette surface, tout d'abord, n'est pas plane ; elle présente des irrégularités plus ou moins accusées ; elle est en outre parsemée d'accidents divers, cours d'eau, voies de communication, constructions, etc., qui s'y trouvent placés par la nature ou par la main de l'homme. Cette représentation

s'obtient conventionnellement, sur une feuille de papier sensiblement plane, par les procédés de la *Topographie*, qui ne cesse de faire un constant appel à la Géométrie pour les diverses opérations qu'elle exige.

Les procédés en question sont naturellement variables suivant le degré d'exactitude que l'on poursuit, et qui dépend surtout lui-même de l'échelle employée. Il s'ensuit que la Topographie met en œuvre au plus haut point les qualités de sagacité, en même temps qu'elle nécessite une profonde connaissance de la Géométrie.

Il y a bien peu de situations où des notions au moins élémentaires de Topographie ne trouvent pas leur emploi. Indispensable à l'ingénieur, d'un intérêt tout à fait capital au point de vue militaire, la Topographie est aussi nécessaire à l'agriculture; sans son secours, les drainages, les irrigations, pour ne citer que ces seuls exemples, sont impossibles à concevoir et à exécuter d'une façon rationnelle. Nous croyons qu'elle présente de plus, au seul point de vue scientifique, le grand mérite de ramener sans cesse l'esprit à la notion du relatif, et de montrer, mieux qu'aucune autre des applications de la science de l'étendue, quelles sont les relations de l'abstrait et du concret. Sans Géométrie, nous le répétons, la Topographie ne saurait exister. Mais en se bornant à mettre en usage les propriétés que nous fournit la Géométrie pure, nous arriverions à une Topographie incomplète et souvent impraticable. Il est nécessaire à chaque instant d'employer des méthodes approchées à la place des méthodes exactes, et d'apprécier les limites des erreurs qui s'ensuivront. A tous ces titres, la Topographie, dont la pratique est difficile, mais dont les principes sont simples, devrait tenir une place peut-être plus importante encore que celle qu'elle occupe aujourd'hui.

C'est à la Topographie qu'on peut rattacher l'*Hydrographie*, représentation du fond des mers, et qu'il nous suffit ici de mentionner.

Dans la pratique, toute opération topographique ne peut s'effectuer d'une manière efficace qu'en s'appuyant sur certains repères fixes préalablement établis. Ces repères sont fournis par la *Géodésie*, qui constitue également l'une des importantes applications de la Géométrie. Mais ici, l'esprit général de la science et les méthodes qui en découlent sont d'un ordre entièrement différent. Le problème consiste à placer sur toute la surface d'un pays, et en assez grand nombre, une série de points dont on détermine les positions, soit sur une surface idéale qui est par exemple celle du niveau moyen des mers, soit au-dessus de cette surface, ce qui constitue le problème particulier du *nivellement*.

Nous ne voulons pas entrer dans la description des moyens généraux qu'emploie la Géodésie, expliquer ce que c'est que la triangulation, non plus que les réseaux géodésiques des divers ordres. Mais ce que l'on doit retenir, c'est que pour la triangulation du premier ordre notamment, la poursuite de l'exactitude la plus rigoureuse s'impose impérieusement, à l'inverse de ce qui se produisait en Topographie. Le problème est donc celui de pousser l'approximation à son maximum, lequel dépend à la fois des méthodes et de la perfection des instruments. Il n'est plus permis de négliger la courbure générale de la surface terrestre; on ne saurait l'assimiler à un plan, à cause des grandes étendues sur lesquelles on opère. Bien plus, on ne se contentera même pas d'assimiler cette surface à une sphère, on tiendra compte de l'aplatissement du globe; d'où la nécessité de faire intervenir des notions délicates et complexes de géométrie pure, relatives à la théorie des surfaces. Nous sommes cependant ici dans une science appliquée, et il n'y a pas à se dissimuler que les résultats obtenus seront entachés d'erreurs; seulement, il faut que ces erreurs soient aussi faibles que possible; il faut surtout que nous en connaissions très nettement les limites. Le temps et le travail ne sont plus ici que

des éléments secondaires; on fera toute la dépense nécessaire à ce point de vue, sans essayer de poursuivre une économie qui irait contre le but à atteindre. On se ménagera en outre des moyens de vérification nombreux et variés, s'entraidant et se contrôlant les uns les autres; et si des opérations ont conduit à des résultats entachés d'erreurs supérieures à la limite qu'on sait pouvoir s'imposer, ces opérations seront au besoin reprises de toutes pièces.

On ne peut se défendre d'une véritable admiration pour le degré d'exactitude auquel atteint la Géodésie moderne, pour la belle conception de ses méthodes et la perfection presque idéale des instruments qu'elle emploie. Si pourtant des progrès nouveaux, ce qui semble d'ailleurs peu probable, amenaient ces instruments à un degré de perfection plus considérable encore, on ne se contenterait plus des résultats obtenus aujourd'hui; ils seraient regardés par nos successeurs comme une approximation grossière, si admirables qu'ils nous paraissent actuellement.

Il est à peine utile de faire remarquer que, dans les problèmes que pose la Géodésie, la représentation graphique n'est plus d'aucun secours; car dans le dessin le plus rigoureusement exécuté, il s'introduit des erreurs graphiques très supérieures à la limite qu'on s'est imposée. Il y a donc nécessairement ici une application simultanée de la science de l'étendue et de celle du calcul.

Parmi les sciences qui se rapportent à l'étude de la surface terrestre, il en est une qui ne faisait jadis qu'un bien discret appel à la Mathématique : c'est la Géographie; cet état de choses s'est modifié, et l'on s'occupe aujourd'hui, à l'étranger plus qu'en France, il faut le dire, de *Géographie mathématique*. Nous nous bornerons à l'un des côtés des nombreuses questions soulevées par cette application, en présentant quelques

considérations d'ensemble sur l'établissement des *cartes géographiques*.

Lorsqu'il s'agit de figurer une portion plus ou moins considérable de la surface terrestre au moyen de tracés exécutés sur un plan, comme on le fait en Topographie, le problème est évidemment impossible, du moins en essayant de former, toujours comme en Topographie, une figure semblable à celle que l'on veut représenter. La surface réelle, en effet, est une sphère ou une surface courbe se rapprochant de la sphère ; car bien entendu on négligera ici les accidents de détail des terrains. La carte au contraire est plane. C'est donc par une certaine transformation de la surface sphérique sur un plan que devra se faire la construction. On tracera sur le plan les figures transformées d'un certain nombre de méridiens et de parallèles régulièrement espacés, et l'on aura un *canevas géographique*.

Chacune des transformations dont il s'agit correspond à ce qu'on appelle un système de *projection géographique*. On peut en imaginer à l'infini, et quelques-uns de ces systèmes sont plus généralement en usage. On adopte les uns ou les autres suivant le but que l'on se propose. Tantôt on veut déformer le moins possible les figures, c'est-à-dire conserver les angles ; tantôt il y a intérêt à ne pas altérer les aires. Dans la pratique, et pour une contrée d'étendue moyenne, comme cela a eu lieu pour les cartes de France, pour celles du service géographique de l'armée et du service vicinal, par exemple, on s'efforce, par des moyens plus ou moins empiriques ou conventionnels, d'arriver à un certain équilibre entre les divers inconvénients et les avantages des différents systèmes. Des travaux extrêmement intéressants au point de vue purement scientifique ont été faits en grand nombre sur ce sujet. Les problèmes dont il s'agit touchent, comme on le voit, à la question plus générale de la représentation des surfaces les unes sur les autres, et exigent l'intervention simultanée de la

Géométrie et de la Géométrie analytique dans les parties où cette dernière emploie le Calcul infinitésimal.

Soit en Géodésie, soit en Géographie, on est conduit à se servir des résultats d'une autre science d'application qui se relie assez étroitement aux deux premières : c'est l'*Astronomie*, qui peut être étudiée à deux points de vue très différents. S'il s'agit de déterminer les mouvements réels des corps célestes, on est dans le domaine de la Mécanique céleste, dont il ne s'agit pas ici et dont nous dirons quelques mots au chapitre suivant. Mais on peut aussi envisager l'Astronomie en se préoccupant seulement des positions des astres relativement aux observations que nous en pouvons faire à la surface de la Terre, ce qui n'empèche d'ailleurs en rien d'utiliser les résultats que la Mécanique céleste nous fournit. La science réduite à ces proportions forme l'*Astronomie descriptive*, qui est, elle aussi, l'une des branches importantes des connaissances humaines auxquelles s'applique la Géométrie. Rien qu'en rapportant, comme le faisaient les anciens, les positions des astres à la sphère idéale qu'on appelle la sphère céleste, les problèmes que l'on est amené à résoudre exigent l'emploi de la Géométrie et du Calcul d'une façon permanente. Les figures sphériques, naturellement, jouent un rôle considérable dans ces questions, où l'on est conduit à envisager les coordonnées célestes permettant de fixer la position de chacun des astres étudiés. Ce sont ces mêmes considérations, ainsi que nous le disions à l'instant, qui permettent aussi la détermination de la position des points à la surface de la Terre ; les coordonnées terrestres employées dans ce but sont la longitude et la latitude, c'est-à-dire l'angle que forme le méridien du point considéré avec celui d'un méridien adopté pour origine, et l'angle que forme avec le plan de l'équateur un rayon terrestre qui aboutit au point considéré. La détermination des longitudes et

des latitudes est une des plus importantes questions de l'Astronomie descriptive, et présente dans la pratique des difficultés qui exigent, pour être surmontées, à la fois beaucoup de science et beaucoup d'expérience acquise.

Ici, bien entendu, comme en Géodésie, les approximations sont poussées aussi loin que le comporte la nature des observations ; et comme cette exactitude extrême est du plus haut prix, on n'hésite pas à faire de grands sacrifices pour augmenter sans cesse la perfection des instruments, car c'est un des facteurs les plus considérables de la rigueur des observations. Pour s'en faire une idée, il n'est pas inutile d'indiquer un résultat d'une vérification d'ailleurs immédiate. On rencontre souvent dans la mesure des angles en Astronomie, des évaluations poussées jusqu'au dixième de seconde. Or, la différence de longitude entre deux points sur le même méridien, si elle est d'un dixième de seconde, correspond à une distance de $3^{m},09$ environ entre les deux points. L'angle dont on peut se tromper ainsi est celui sous lequel on verrait un objet de moins de 39 centimètres à la distance de Paris à Marseille ! Cette image suffit à donner une idée de la précision des résultats possibles en Astronomie. Et pourtant, l'abîme qui sépare l'abstraction pure de la théorie, la valeur absolue de la valeur approchée, n'en reste pas moins profond ; car ce même angle de un dixième de seconde, tout à fait négligeable à nos yeux et à la surface de la Terre, représentera des milliards de milliards de kilomètres, comme erreur, s'il est lui-même une erreur commise dans la détermination de la position de telle étoile fixe.

C'est à ce point de vue que l'Astronomie, en dehors de son évidente utilité pratique, a une importance philosophique de premier ordre dans les sciences d'application, et cela même quand on la considère simplement à l'état d'Astronomie descriptive. Elle seule nous présente un

tel clavier de grandeurs concrètes, elle seule peut donner une idée précise des conditions différentes dans lesquelles peut s'effectuer le passage de l'abstrait au concret.

Une des applications particulièrement utiles de l'Astronomie, et par conséquent de la Géométrie, est la *Navigation*. La détermination des coordonnées terrestres y joue un rôle capital, et cette détermination est ici entourée de difficultés pratiques particulières, tenant à la mobilité de l'observateur et à l'absence générale de repères fixes, sinon dans le voisinage des côtes. Ce problème n'est du reste pas le seul. La détermination des routes à suivre à la surface des eaux nécessite, par exemple, des notions géométriques assez élevées; et ce n'est pas sans raison que, chez les navigateurs appelés à commander, on exige des connaissances mathématiques qui peuvent diminuer les périls auxquels la nature les expose d'une façon particulière. Qui pourrait jamais dire le nombre des existences humaines sauvées par la science mathématique appliquée à la Navigation?

Mais il est temps d'arriver à la science par excellence à laquelle la Géométrie s'applique tout particulièrement. Nous voulons parler de la *Géométrie descriptive*. Tout le monde aujourd'hui en connaît l'histoire, et nous ne la rappellerons qu'en peu de mots. De temps immémorial, et jusqu'au siècle dernier, on a reconnu la nécessité de se livrer, dans la pratique des constructions, à une représentation exacte des objets avant de les édifier ; cette nécessité s'imposait d'une façon toute particulière dans l'emploi de la pierre et du bois. Aussi les corporations de charpentiers ou de tailleurs de pierre possédaient-elles des procédés innombrables, que souvent elles gardaient secrets avec un soin jaloux, pour résoudre les problèmes pratiques. Mais autant de problèmes, autant de procédés, parfois ingénieux, mais généralement pénibles et sans lien entre eux. Il était

réservé au génie de Monge d'effectuer la synthèse de toutes ces solutions de détail, de les coordonner en une doctrine unique dont la constitution est rigoureusement scientifique. Elle l'est tellement qu'en toute rigueur nous aurions pu ranger la Géométrie descriptive parmi les branches de la Mathématique pure. Mais elle a beau opérer sur des abstractions géométriques, le but de la science dont il s'agit est tellement net, et son origine trahit si naturellement sa tendance nécessaire, qu'il nous a paru plus naturel de la mettre au nombre des sciences appliquées.

Il s'agit, on le sait, de la représentation des objets de l'espace par des figures planes. Monge y a substitué la représentation des figures géométriques ; il a employé pour cela le système des projections sur deux plans perpendiculaires, l'un supposé horizontal, l'autre vertical. Un point se trouve défini nettement par ses deux projections, et dès lors, toute figure, étant composée de points, sera représentable aussi de la même manière. Depuis qu'elle a été créée, la Géométrie descriptive a fait d'immenses progrès, accumulant les méthodes, simplifiant les constructions, et arrivant même parfois de la façon la plus heureuse au secours de la pure science géométrique elle-même. Cependant, elle n'a pas perdu de vue son origine première et sa raison d'être ; et les deux grandes catégories de questions auxquelles la Géométrie descriptive était surtout destinée forment deux sciences d'application spéciales : la *Stéréotomie* et la *Charpente*, dont l'usage pratique est perpétuel.

A la Géométrie descriptive se rattache aussi la Perspective, cependant plus ancienne, et qui permet d'obtenir une représentation répondant aux apparences présentées par les objets, et non plus à leurs dimensions réelles.

Enfin, il est possible de concevoir encore un mod[illegible]
de représentation dans lequel on ne fait e[illegible]

d'un seul plan horizontal de projection. Un point, dans ce système, est représenté par sa projection accompagnée d'un chiffre qui donne l'indication de la distance de ce point à un plan horizontal fixe de comparaison, placé au-dessous ou au-dessus. C'est grâce à ce système des *projections cotées* qu'on établit les plans topographiques dont nous avons parlé plus haut et aussi les cartes hydrographiques ou cartes marines.

Ces divers modes de projection, et quelques autres dont l'usage est moins général, reposent sur un emploi permanent de la Géométrie elle-même, et ont donné souvent naissance à des problèmes dont la solution est venue enrichir la science pure.

Nous voudrions maintenant parler d'un ordre tout différent d'applications de la Géométrie : ce sont celles qui ont pour objet les opérations du calcul lui-même. Toute opération de calcul peut se traduire par une construction géométrique. Les théorèmes de la Géométrie permettent souvent d'économiser les constructions et d'obtenir ainsi, par des tracés, et avec la précision que ces tracés comportent, des résultats beaucoup plus longs et pénibles à obtenir par le calcul lui-même. L'ensemble des méthodes adoptées dans ce but constitue le *Calcul graphique*, dont il semble qu'on doive trouver l'origine dans un livre de Cousinery, *le Calcul par le trait*, qui remonte à 1840. Ces méthodes ont été très développées depuis, et l'usage s'en est de plus en plus répandu dans la pratique. Il en est même résulté une nouvelle branche spéciale, la *Statique graphique*, ainsi nommée parce que la grande majorité des questions qu'elle traite sont empruntées à la Statique et à ses applications. Nous citerons parmi ces questions les polygones funiculaires, les polygones de Varignon, les conditions de stabilité des voûtes ou des murs de soutènement ; mais elles sont pour ainsi dire illimitées et il n'est pas rare aujourd'hui, dans beaucoup d'ateliers

ou de bureaux, de voir remplacer par des tracés exigeant un temps relativement court, les calculs auxquels conduirait la solution de tel problème pratique.

Il est bon de remarquer que, dans beaucoup de cas, ces solutions sont parfaites, bien qu'approximatives. Si en effet les tracés sont bien exécutés, et si l'on est sûr que l'erreur graphique n'est pas supérieure aux approximations limites que comporte la nature concrète de l'objet traité, il est évident que le calcul mathématique rigoureusement exact ne saurait rien donner de plus. Il n'est pas même besoin d'aller toujours jusque-là; si l'on sait d'avance, par l'expérience et la pratique, qu'une approximation déterminée suffit, il est bien inutile de chercher à atteindre au delà, quand même on le pourrait aussi bien par le tracé graphique que par la nature de la question. On trouve fréquemment dans cette remarque l'occasion d'une grande économie de temps et de peine, lorsqu'on se propose d'appliquer à une question les méthodes de la Statique graphique et plus généralement du Calcul graphique.

Il est encore une dernière forme sous laquelle la Géométrie et en même temps la Géométrie analytique viennent prêter leur aide au calcul; c'est par l'emploi des *abaques*, auquel M. d'Ocagne a apporté de grands perfectionnements, et dont il a fait, sous le nom de *Nomographie*, un nouveau corps de doctrine. Sous ce titre, suivi du sous-titre : *Les calculs usuels effectués au moyen des abaques*, il a publié en 1891 un excellent exposé de cette doctrine, aussi remarquable par la clarté et la concision (il comprend à peine une centaine de pages) que par le choix et la variété des exemples d'application. Les indications suivantes sont extraites à peu près textuellement de la Préface de cet intéressant volume, ou empruntées à d'autres écrits de M. d'Ocagne. Il m'a semblé qu'en cette occasion je ne pouvais mieux faire que de laisser à l'auteur lui-même le soin d'expli-

quer le but de la méthode, et les moyens à mettre en œuvre pour atteindre ce but.

La Nomographie peut fournir la représentation sur un plan, au moyen de certains systèmes de courbes faciles à construire, et construites une fois pour toutes, des équations qui lient entre elles les quantités soumises au calcul. De tels tableaux graphiques, ou abaques, donnent, par une simple lecture, les résultats à déduire de la formule à laquelle ils s'appliquent, et suppriment ainsi, une fois construits, toute espèce d'opérations.

Leur exécution représente un certain travail, beaucoup moindre que celui nécessaire à la construction de tables numériques pour le même objet. Cette exécution du reste ne sera avantageuse que pour des formules d'un usage fréquent; mais ces formules sont nombreuses dans la pratique.

La première idée des abaques semble remonter à Pouchet (1795). Depuis lors, M. Lalanne surtout la perfectionna en imaginant le principe de l'anamorphose.

Pour en comprendre l'intérêt il faut indiquer rapidement sur quoi repose la construction d'un abaque ; une équation $f(x, y, z) = o$ est représentée si, donnant à z une certaine valeur z_0 on trouve la courbe $f(x, y, z_0) = o$ qui s'ensuit, et si on en fait autant pour un grand nombre de valeurs de z. Si l'on suppose ces lignes tracées sur un plan quadrillé parallèlement aux coordonnées OX, OY, on a l'abaque de l'équation proposée ; chaque courbe particulière répondant à une valeur déterminée de z est une *ligne isoplèthe* qui peut être désignée par une cote.

Ceci étant, le principe de l'anamorphose de M. Lalanne a pour but, lorsque la forme de l'équation s'y prête, d'opérer une transformation qui substitue aux courbes isoplèthes de simples droites. Ce principe peut être généralisé, et l'on arrive à avoir trois systèmes de droites variables; la condition pour que trois droites, chacune d'un des systèmes, soient concourantes, se traduit pré-

cisément par l'équation proposée, dont l'abaque ainsi construit fournit la représentation.

Enfin, M. d'Ocagne, par une application judicieuse du principe de dualité, est parvenu à substituer aux abaques à droites isoplèthes d'autres abaques, à points isoplèthes, plus simples, plus clairs, et s'appliquant à des équations à plus de trois variables.

M. l'ingénieur des mines Lallemand, connu pour ses beaux travaux de Géodésie, a fait connaître aussi un procédé très ingénieux, applicable à une catégorie particulière d'équations à plus de trois variables.

De nouvelles extensions indiquées par M. d'Ocagne, et fondées sur d'autres principes, donnent une portée plus grande encore à l'usage des abaques, et ont permis de compléter l'exposé systématique présenté sous le nom de Nomographie.

Au point de vue philosophique, on peut faire un rapprochement entre la Nomographie et la Géométrie descriptive. L'un et l'autre de ces corps de doctrine ont pour but la mise en application de certains principes, en vue de certains besoins absolument pratiques. La Géométrie descriptive ramène au plan les faits de l'*espace*, la Nomographie ceux du *nombre*. L'un repose sur l'emploi de quelques propositions simples de Géométrie pure, l'autre sur quelques principes non moins élémentaires de Géométrie analytique.

CHAPITRE IV

L'application de la Mécanique.

S'il est une science dont les résultats soient de nature à frapper d'admiration les esprits, même ceux qui y sont le moins initiés, c'est assurément l'Astronomie. Nous avons rapidement indiqué dans le chapitre précédent les caractères de l'Astronomie descriptive. Mais c'est surtout sous sa seconde forme, la *Mécanique céleste*, qu'elle arrive à exercer sur l'imagination cette action d'une intensité profonde. La raison en est facile à comprendre. En Astronomie descriptive, on enregistre les faits provenant des observations : si délicates et difficiles que soient ces observations, si précises que soient les mesures qu'elles comportent, rien en cela ne semble sortir du domaine habituel de la science. On étudie bien les mouvements des astres et les divers phénomènes astronomiques, mais c'est toujours au point de vue du passé et du présent.

En Mécanique céleste, au contraire, comme on fait remonter à l'action de forces connues les mouvements dont il s'agit, on en peut calculer les lois. Dès lors, on sait de façon précise quelles positions doivent être occupées par chacun des astres à un instant quelconque; et l'on arrive ainsi à pouvoir *connaître l'avenir*, au point de vue des phénomènes célestes; c'est cette faculté de prédiction, s'exerçant sur des sujets sem-

blant inaccessibles, qui force l'admiration du vulgaire et lui fait attribuer à l'Astronomie une sorte de puissance mystérieuse.

Au point de vue philosophique, ce que nous devons surtout constater, et ce qui rend compte de la puissance de ses résultats, c'est qu'elle est, de toutes les applications de la Mécanique rationnelle, celle dont les phénomènes se trouvent concorder au plus haut degré avec les résultats de la science pure.

Dans tout fait mécanique observable sur la Terre, en effet, les complications sont extrêmes ; les causes physiques concourant au résultat final sont innombrables, enchevêtrées, se refusent à toute analyse, et par conséquent les conditions réelles, concrètes, sont très éloignées des abstractions.

Lorsqu'il s'agit des phénomènes célestes, au contraire, l'isolement des astres, leurs grandes distances mutuelles, la résistance nulle (ou peut-être sensiblement nulle) du milieu font que les êtres de raison de la Mécanique et les faits naturels présentent une coïncidence presque parfaite. Il est dès lors compréhensible, et même tout naturel, que les résultats de la Mathématique pure, c'est-à-dire de la Mécanique rationnelle, offrent avec les observations une concordance dont n'approche aucune autre catégorie de phénomènes naturels.

C'est de Kepler, et surtout de Newton que date la Mécanique céleste. Le premier, après dix-huit ans de patientes observations dont un génie tel que le sien pouvait seul tirer profit, découvre les lois suivant lesquelles se déplacent les astres composant notre système solaire. Le second, partant de ces lois, grâce à une intuition merveilleuse servie par une puissance mathématique incomparable, montre que ces lois sont elles-mêmes la conséquence d'une autre loi — ou si l'on veut, d'une hypothèse — unique. Il ramène ainsi phénomènes plus ou moins complexes à un p

plus simple : celui de la *gravitation* ou *attraction universelle*.

La Mécanique céleste est donc fondée, au moins en ce qui concerne les planètes et leurs satellites, seuls corps célestes auxquels soient applicables les observations que nous présentons ici. A partir de cet instant, il semble que tout soit dit. Les planètes décrivent régulièrement des orbites elliptiques autour du Soleil; autour d'elles, et entraînés par elles, les satellites circulent suivant des lois pareilles. Les masses de tous ces corps ont été calculées; on sait à tout instant, dans l'avenir aussi bien que dans le passé, quelle position chacun d'eux occupera dans l'espace par rapport au Soleil ; les phénomènes tels que les éclipses, les passages de la planète Vénus sur le Soleil, les phases de la Lune, par exemple, sont prédits de façon précise. On pourrait croire qu'il n'y a plus de place que pour l'Astronomie d'observation, dont le rôle se bornera à une simple vérification permanente, et pour ainsi dire inutile, des résultats obtenus par le raisonnement et le calcul.

Il n'en est rien pourtant, et la voie qui doit être parcourue par les Laplace et les Le Verrier reste largement ouverte. Sans parler des mouvements de rotation de chaque astre sur lui-même, mouvements qui donnent lieu à de difficiles problèmes de Mécanique, et en continuant à considérer chaque astre comme un point matériel, il faut remarquer en effet qu'en vertu de la loi de la gravitation, tous ces astres exercent eux-mêmes des actions les uns sur les autres. Les étoiles fixes, de leur côté, exercent aussi des attractions; par conséquent, ce ne seront plus des ellipses rigoureuses que décriront les planètes ; chacune des trajectoires, par rapport à l'ellipse mathématique idéale, présentera des différences plus ou moins appréciables ; les mouvements prévus et prédits subiront des *perturbations*. C'est ce que les observations ont confirmé ; et l'étude

de ces perturbations est et restera longtemps l'un des chapitres importants de la Mécanique céleste, sans parler des comètes, des mouvements de rotation, de l'astronomie stellaire, du mouvement d'ensemble du système solaire, etc.

Si les perturbations sont faibles, cela tient à plusieurs causes : d'abord, le Soleil a une masse considérable par rapport à celle de chacune des planètes, et même de toutes les planètes réunies; en second lieu, les orbites elliptiques, qui n'appartiennent pas à un même plan, sont dans des plans qui ne présentent les uns sur les autres que de faibles inclinaisons; un fait analogue a lieu pour les satellites; les planètes sont assez éloignées les unes des autres pour que leurs actions mutuelles soient réduites; enfin, si quelques-unes des étoiles fixes ont très probablement des masses formidables, souvent supérieures de beaucoup à celle du Soleil, les distances énormes qui les séparent du système solaire rendent quand même l'effet de leur attraction négligeable. Tout cela réduit à peu de chose les perturbations, mais ne les supprime pas; le problème mécanique rigoureux est donc fort loin d'avoir une solution, et pour avoir une idée de la difficulté qu'il présente, il suffit de se rappeler ceci : en supposant seulement trois points matériels de masses connues, s'attirant mutuellement suivant la loi de Newton, la détermination de leurs mouvements est un problème (célèbre sous le nom de *problème des trois corps*) sûrement insoluble par les moyens ordinaires que fournit le calcul intégral. Des centaines, peut-être des milliers de mémoires ont traité cette question; les plus grands géomètres l'ont abordée, et cependant c'est à peine si elle a fait quelques progrès; en tout cas, elle n'a été résolue rigoureusement que dans quelques cas particuliers.

Si le problème des perturbations reste théoriquement insoluble, on pourrait se demander s'il en résulte

une lacune réelle dans la science concrète, c'est-à-dire si les perturbations ne rentreraient pas dans la catégorie des grandeurs négligeables, inférieures aux limites des erreurs admissibles. Il n'en est rien ; et c'est pour cela que bientôt les observations vinrent révéler les discordances entre les résultats annoncés et ceux que l'on constatait, et provoquèrent ainsi de nouvelles recherches théoriques. On sait qu'à défaut de solution absolue, l'Astronomie a été dotée de méthodes qui permettent de pousser très loin, aussi loin même qu'on le veut, le calcul des perturbations ; on n'ignore pas non plus, dans cet ordre d'idées, l'histoire de la découverte de la planète Le Verrier par le calcul, et je ne la referai pas ici.

Ce qu'il est utile d'indiquer, c'est que la science, dans cette direction, est appelée à un progrès indéfini. A mesure que les instruments se perfectionnent, on arrive dans les observations à mesurer les grandeurs avec une approximation qui croît sans cesse. Si loin que soit poussée celle qu'a fournie la science pure, l'observation viendra donc révéler, à un certain instant, des discordances avec la théorie, et en exiger l'explication; la théorie progressera, ajoutera un terme nouveau à sa série, et ainsi de suite.

A ce sujet, une digression est nécessaire ; car en dépit du caractère paradoxal qu'elle présente en apparence, elle renferme, je crois, un précieux enseignement. Kepler, nous l'avons rappelé, cherchant par l'observation les lois des mouvements des planètes, trouva en particulier qu'elles décrivent des ellipses dont un des foyers est le Soleil (ou le centre du Soleil). Il n'avait à sa disposition que des instruments relativement grossiers, ou plutôt qui nous paraîtraient tels aujourd'hui. Supposons, au contraire, que dès cette époque il eût été en possession de l'outillage le plus parfait et le plus complet de l'un de nos modernes observatoires ; que fût-il arrivé ? A cause même de son admirable talent

d'observation, du soin et de la patience qu'il apportait à ses travaux, les perturbations qui lui ont échappé se seraient révélées; mais, étant révélées de la sorte, en superposition avec le mouvement elliptique qu'on ne connaissait pas préalablement, on n'aurait eu comme résultat qu'une trajectoire indéfinissable; et la sanction de tant d'efforts par un observateur de génie aurait été, à la place des trois admirables lois de Kepler, une vérité telle que celle-ci : « Les planètes, dans leurs mouvements autour du Soleil, décrivent des orbites très compliquées, qui ne sont pas planes, et cela suivant des lois que l'Algèbre ne saurait traduire. » Il est supposable que cela n'aurait pas suffi à Newton pour le conduire à la découverte de l'attraction universelle.

Donc — et c'est là le paradoxe que nous indiquions tout à l'heure, — dans certaines conditions, le trop grand progrès des moyens d'observation peut être un obstacle au progrès de la science, un empêchement à la découverte des lois de la nature. Ce qu'il faut, c'est que ces moyens matériels soient en harmonie avec l'état général d'avancement des connaissances correspondantes. Le progrès scientifique ne se fait en somme que sous la forme d'approximations successives; et surtout lorsque des faits observés il s'agit de remonter à des causes, à des phénomènes plus généraux, il est souvent à désirer que les observations ne soient pas trop approchées, c'est-à-dire qu'elles ne reflètent pas l'influence des causes accessoires de complications, venant se superposer au phénomène principal, et rendant impossible l'étude mathématique.

Ce que nous avons dit suffit à caractériser l'Astronomie, qui restera quand même, et probablement toujours, comme l'exemple le plus frappant de rapprochement entre la Mathématique pure et les faits du monde réel, et comme un véritable monument élevé à la gloire de l'intelligence humaine et à la puissance du raisonnement mathématique.

Dès que de la Mécanique rationnelle on essaie de tirer des conclusions concrètes, c'est-à-dire dès qu'abandonnant les abstractions pures, on vient leur substituer des réalités, même par voie d'hypothèse, comme simple exercice, sans qu'aucun problème pratique soit effectivement en jeu, on fait par cela même de la *Mécanique appliquée*. Cette appellation est donc très générale et comprend notamment la Mécanique céleste, dont nous venons de parler.

La Mécanique appliquée se subdivisera en un nombre considérable de branches secondaires, et ce nombre peut être appelé à s'accroître encore chaque jour. Parmi elles, l'une des plus importantes est la *Mécanique industrielle*, qui concerne plus spécialement l'étude des *machines*, de leur fonctionnement et de leur construction. C'est à Poncelet qu'on doit attribuer le mérite des plus grands progrès accomplis en Mécanique industrielle, progrès qui n'ont pas eu seulement un intérêt scientifique, mais qui ont réagi de la façon la plus heureuse sur le développement industriel lui-même.

Une machine est en général un assemblage de corps destiné à transmettre l'action de forces, et à produire ainsi du travail mécanique sous la forme la plus commodément utilisable pour le but que l'on poursuit. Ce résultat s'obtient par des dispositions très diverses et en particulier par des transformations de mouvements, qui donnent lieu à l'étude des *mécanismes*, et à la considération des machines à un point de vue exclusivement cinématique. Cette étude cinématique dans certains cas exceptionnels, comme dans l'horlogerie, par exemple, entre pour la presque totalité dans la théorie des machines. Cela arrive lorsque les forces à mettre en jeu sont d'une intensité tellement faible qu'on a une surabondance de ce côté, d'où il résulte que l'économie de force ne présente aucun intérêt ; la question mouvement est capitale, et la question travail se réduit pour ainsi dire à rien.

Mais en général il n'en est point ainsi, et ce sont même des conditions exactement contraires en présence desquelles on se trouve. L'économie de la force est essentielle; et toutes choses égales d'ailleurs, la meilleure machine sera celle qui avec une force déterminée produira le plus de travail, ou, ce qui revient au même, produira un travail donné avec le moins de force. Nous ne saurions entrer ici, même à titre d'exemple, dans la moindre considération particulière sur l'établissement des machines, qui se subdivisent à l'infini et sont généralement classées suivant la nature de la force que l'on emploie. Mais il nous semble indispensable de présenter à ce sujet quelques observations d'un ordre absolument général.

Il faut d'abord bien remarquer que la Mécanique industrielle, s'appliquant à des corps naturels et poursuivant la solution de questions pratiques, doit avoir recours, sous peine de mécomptes, non seulement à la Mécanique rationnelle, mais encore à la Physique, à la Chimie, à toutes les sciences de nature à corriger la distance entre les abstractions et les réalités, en fournissant sur celles-ci des indications complémentaires. La théorie des machines devient donc beaucoup plus complexe qu'on n'aurait pu l'imaginer, si on veut la traiter avec une certaine rigueur, et dans des conditions permettant d'en déduire des résultats pratiques.

Une machine comprend essentiellement trois parties : *le récepteur*, *les transmissions* et *l'outil*. Le récepteur puise en quelque sorte dans la source de force naturelle quelconque qu'il s'agit d'utiliser, et emploie cette force dont on s'est emparé pour produire un certain mouvement. Les transmissions transforment ce mouvement et finissent par produire ainsi celui qui convient à la marche de l'outil. En toute machine, l'élément essentiel qui mérite de fixer l'attention, c'est le travail ou la force vive, dont les définitions sont données et dont l'identité est démontrée dans la Mécanique rationnelle,

pour les systèmes de points matériels. Par l'utilisation d'une force déterminée, quelle qu'en soit la source, une machine absorbe donc une certaine somme de force vive; elle transmet cette force vive jusqu'à l'outil, où l'on finit par la retrouver sous forme de travail. C'est ainsi du moins que les choses se passeraient si les résistances des organes, la raideur des liens flexibles, les chocs, les vibrations et d'autres causes nombreuses encore, ne représentaient une certaine perte de force vive employée à produire inutilement ces divers effets, et qu'on ne saurait retrouver, par conséquent, dans l'outil, c'est-à-dire sous forme de *travail utile*. La somme de force vive absorbée par le récepteur correspondant juste à ce qu'on nomme le *travail moteur*, il suit de là que le travail utile est toujours inférieur au travail moteur. Le rapport de ces deux grandeurs constitue le *rendement*. L'utopie des chercheurs de mouvement perpétuel consiste, au fond, dans la conception d'une machine dont le rendement serait supérieur à l'unité, ce qui est radicalement impossible. Autant vaudrait imaginer un moulin qui, recevant 9 kilogrammes de blé, rendrait en échange 10 kilogrammes de farine.

Les théories de la Physique moderne ont établi que l'on pouvait affirmer une équivalence remarquable entre deux grandeurs dont les apparences sont cependant bien différentes : la chaleur et le travail mécanique. De là à conclure que la chaleur ne consiste qu'en un cas particulier de mouvement des molécules à l'intérieur des corps, la pente était naturelle ; ce n'est toutefois qu'une théorie, ou une hypothèse ; mais cette hypothèse rationnelle a produit de beaux et utiles résultats.

Allant plus loin encore, on est arrivé à la théorie de l'*énergie*, en désignant sous ce nom plus général une qualité inhérente à la matière et qui se retrouve sous une foule d'aspects divers et de manifestations multiples : force vive, chaleur, phénomènes électriques, etc..

les phénomènes caloriques ayant cependant une prépondérance accentuée. Sur ces bases, on a établi la grande vérité naturelle connue sous le nom de *conservation de l'énergie*, et, revenant aux machines, on peut, avec un plus haut degré de simplicité dans le langage, dire qu'une machine est un *transformateur d'énergie*. Ces vues générales ont été de nature à jeter quelques clartés philosophiques sur des sujets compliqués lorsqu'on les considère isolément, et elles montrent, en tout cas, que les lacunes que peut présenter encore la théorie de telle ou telle catégorie de machines sont intimement liées à tel ou tel chapitre correspondant de la Physique. C'est ainsi par exemple que l'étude des machines à vapeur, et plus généralement des moteurs thermiques, ne peut attendre de perfectionnements que de ceux de la Thermodynamique, et nullement de la Mécanique rationnelle.

Sur l'étude générale des machines viennent se greffer certains chapitres spéciaux, tels que ceux qui ont pour objet les freins, les volants, les *régulateurs*, par exemple. Nous nous contentons de les mentionner.

Ce n'est pas seulement à la Mécanique industrielle que la Mécanique rationnelle vient s'appliquer. Elle rend des services dans l'étude de tous les phénomènes où interviennent les forces ou les mouvements, en dehors des machines proprement dites. C'est dire que l'art de l'Ingénieur n'est presque autre chose qu'une continuelle application de la Mécanique.

Les constructions notamment exigent l'intervention de la Mécanique; bien qu'il ne s'agisse pas ici de mouvements en apparence, il importe au plus haut point d'étudier les conditions de stabilité, c'est-à-dire de se placer pratiquement dans des conditions où des mouvements ne puissent pas se produire. La stabilité des voûtes, celle des murs de soutènement, les problèmes concernant les ponts suspendus offrent des exemples curieux de ce genre de questions.

Il faut aussi y rattacher le chapitre si important, et obscur encore sur certains points, que constitue la *Résistance des matériaux*. Mais ici encore, l'expérience devient indispensable, on est dans un domaine qui relève à la fois de la Physique et de la Mécanique, et ce serait une erreur de croire que les problèmes de résistance des matériaux puissent être utilement traités par le secours de la théorie pure.

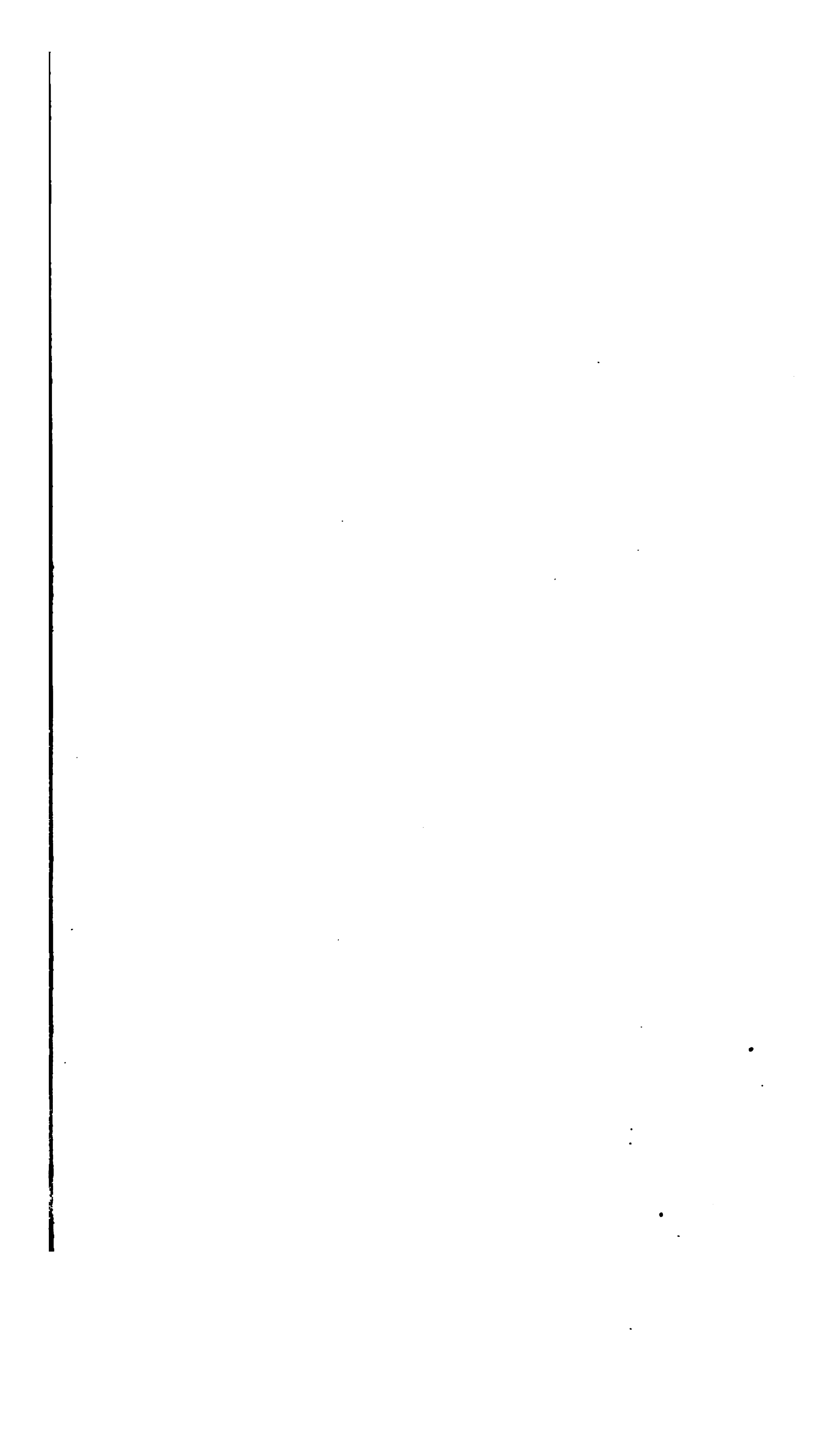
Il est un genre de questions où l'étude des mouvements et du jeu des forces présente un caractère tout spécial : ce sont celles qui concernent les fluides ; grâce à des hypothèses purement gratuites, et tout à fait analogues à celle qui nous fournit le point matériel, on a pu imaginer des fluides idéaux, gaz ou liquides, permettant de faire rentrer dans la science pure l'étude des phénomènes dont il s'agit, ce qui donne lieu à l'*Hydrostatique* et à l'*Hydrodynamique*.

Mais aussitôt qu'on veut essayer de tirer parti des résultats ainsi obtenus, c'est-à-dire passer à l'*Hydraulique*, il est nécessaire de rectifier ces conceptions premières, de les corriger en y apportant des données nouvelles, fournies directement par l'expérience ou par les théories physiques qui paraissent le mieux s'adapter à l'ensemble des phénomènes observés. Le régime des cours d'eau, les barrages, les distributions d'eau dans les villes, les canaux, et bien d'autres sujets encore, sont des applications de l'Hydraulique.

Les constructions navales soulèvent à la fois des questions d'Hydraulique et de Mécanique appliquée sous toutes les formes, surtout avec l'importance qu'a prise de nos jours la navigation à vapeur.

Rien que par ces brèves indications, on se rend compte de l'étendue des services que rend la Mécanique rationnelle, aidée par l'ensemble des autres sciences. Elle est insuffisante, évidemment, car les hypothèses

sur lesquelles on l'a édifiée sont généralement trop éloignées de la réalité pour que les résultats fournis présentent l'approximation dont on a besoin. Mais sans son secours, les sciences d'application dont nous avons parlé n'existeraient pas ; et du reste, si grossière qu'elle soit, la première approximation fournie par la théorie n'en constitue pas moins une indication des plus précieuses.



ENSEIGNEMENT

CHAPITRE PREMIER

Vue générale sur l'enseignement de la Mathématique.

Dans toute cette dernière partie, mon intention est de présenter des idées générales plutôt qu'une étude détaillée des méthodes d'enseignement, ou une critique approfondie de ces méthodes. Cependant, il est assez difficile parfois de faire comprendre ce qu'on juge raisonnable, sans rapprocher sa thèse de la réalité des faits, afin d'attirer l'attention sur les points qui paraissent plus particulièrement perfectibles. Dans d'autres circonstances, l'indication de ces faits a son utilité comme exemple, et en dehors de toute pensée de discussion.

Dans ces divers cas, c'est surtout à l'enseignement français que j'emprunterai les matériaux qui pourraient m'être nécessaires. J'ai pour cela une raison péremptoire : c'est qu'en matière mathématique je crois le connaître assez bien, tandis que je suis beaucoup moins au courant de la question en ce qui concerne les autres pays. Quelques indications relatives aux universités étrangères pourront cependant s'introduire dans ces observations et servir de termes de comparaison, le cas échéant. Mais tout cela ne prendra jamais qu'un caractère exceptionnel. Mon but serait d'essayer de semer quelques idées justes dont profiteront, s'ils le veulent,

ceux qui sont à même de le faire. Je n'ai pas l'ambition de formuler un plan général de réforme de l'enseignement mathématique; moins encore de préparer une sorte de manuel pédagogique, ce dont je me sentirais profondément incapable.

Ces explications préliminaires étaient utiles pour éviter toute équivoque, et pour préciser à l'avance ma pensée dans la limite où il m'est possible de le faire.

Dire que l'enseignement mathématique est utile, c'est assurément une banalité. Cependant une question se pose dès le début : convient-il de distribuer à tous cet enseignement, ou bien d'opérer une sélection ? N'y a-t-il pas des aptitudes spéciales nécessaires pour réussir dans l'étude de la science mathématique et y faire quelques progrès ? Ne rencontre-t-on pas un grand nombre d'enfants ou de jeunes gens, d'ailleurs bien doués, qui manquent de dispositions naturelles au point de vue qui nous occupe, et dès lors est-il véritablement nécessaire de leur imposer des études dont ils ne sauraient profiter ? Il n'est pas rare de rencontrer des hommes instruits et distingués pour déclarer, parfois avec une légère affectation, qu'ils ont toujours manifesté pour les études mathématiques une aversion profonde, et qu'aucune des notions de cette nature qui leur furent enseignées jadis n'est restée dans leur esprit. J'imagine que dans ces propos il entre souvent un peu d'exagération, même lorsqu'ils sont absolument sincères; il nous est bien difficile de savoir au juste ce qu'a gagné notre cerveau, ce qui s'y est nettement gravé, dans quelle mesure il a profité des études de notre jeunesse. C'est un appareil enregistreur tellement complexe que la question est insoluble sous cette forme. Notre état mental et intellectuel présent est une résultante générale, et personne ne peut savoir avec quelque certitude ce qu'il serait, dans le cas où l'on

aurait supprimé telles ou telles parties des impressions qu'il reçut autrefois.

Aussi je ne m'arrête pas plus longtemps à l'objection ainsi proposée, et je reprends la question en énonçant deux axiomes qui me paraissent vérifiés par une saine observation des faits :

1° Dans le milieu actuel, des notions mathématiques sont nécessaires à tous ;

2° Chaque intelligence moyenne est apte à acquérir ces notions, restreintes à de certaines limites.

Se demander si un enfant a des dispositions pour la Mathématique équivaut à se demander s'il en a pour l'écriture et la lecture. Quelques-uns restent totalement illettrés par faiblesse d'esprit; quelques-uns pourront aussi se refuser à recevoir aucune notion mathématique. C'est une infirmité individuelle, mais qui ne porte aucune atteinte à la proposition générale.

Si l'on posait cette question : « Tout enfant est il apte à devenir un mathématicien ? » ou seulement : « Peut-il apprendre la série générale des branches de la Mathématique composant l'enseignement complet ? » la réponse devrait être toute contraire. Pour continuer à cultiver la Mathématique après les études terminées et en dehors des nécessités professionnelles, un goût spécial est nécessaire, et tout le monde ne l'a certainement pas. Pour pousser ses études dans cette direction, il est bon de s'y sentir porté naturellement, bien que souvent le travail voulu et soutenu vienne suppléer aux aptitudes naturelles, ou plutôt révéler ces aptitudes qu'on ne soupçonnait pas.

En France, le nombre est trop grand des enfants qui ont été inconsidérément lancés vers des études pour lesquelles ils manquaient de dispositions naturelles. Un petit succès de collège, un modeste prix de Géométrie ou d'Arithmétique, suffit quelquefois, la vanité familiale aidant, pour fausser une vocation. On attribue à des fa-

cultés exceptionnelles ce qui est le résultat d'un bon travail moyen, et l'on dirige sur l'École Polytechnique où l'École Normale un malheureux candidat de plus, qui échoue malgré tous ses efforts, et qui aurait sans doute fait le plus honorable des commerçants ou des agriculteurs.

On voit, en résumé, quelle est notre conclusion. De l'aptitude naturelle, aucun compte à tenir s'il s'agit de l'étude des éléments; le plus grand compte, au contraire, s'il est question de pousser plus haut, et surtout d'affronter des concours difficiles.

Mais, en dehors de la difficulté de bien apprécier les aptitudes naturelles, ce qui exige du jugement et une longue observation, l'on est en droit de se demander quelle est la limite ainsi tracée; où s'arrêtent ce que nous appelons les éléments. Je crois qu'on pourrait sans inconvénient grouper sous ce titre, sans que cela ait rien d'absolu, ce que contiennent les programmes de l'ancien baccalauréat ès sciences, complétés par les notions qu'on a introduites avec juste raison dans l'enseignement secondaire moderne, et par quelques vues rapides sur la géométrie moderne, qui manquent à trop de jeunes gens. Cela ne veut pas dire que tous les enfants devront acquérir l'ensemble de ces notions élémentaires ; ils le peuvent tous en vertu de leurs facultés naturelles; mais malheureusement les nécessités de la vie obligeront un grand nombre d'entre eux à interrompre prématurément le cours de leurs études. Je dirai sommairement, dans le dernier chapitre, comment à mon avis devra être compris pour ceux-là l'enseignement mathématique.

Il n'y a pas, je le crois, plusieurs méthodes d'enseignement, si nous entendons par enseignement l'ensemble des efforts par lesquels on cherche à meubler de certaines connaissances le cerveau d'un être humain

qui n'est pas à son entier degré de développement. La haute Mathématique, dont les connaissances sont répandues par des cours publics de facultés ou d'universités, exposées à des hommes déjà instruits, échappe donc à notre observation actuelle, sinon à toute règle.

Mais, en restant dans le domaine de l'enseignement élémentaire, depuis les premières notions du calcul arithmétique jusqu'au calcul des dérivées et aux théories de la Géométrie analytique, le problème est éternellement le même : intéresser l'élève, le provoquer à la recherche, lui donner sans cesse le sentiment, l'illusion si l'on veut, qu'il découvre lui-même ce qui lui est enseigné.

On m'objectera que de tels préceptes sont plus faciles à formuler qu'à mettre en application; sans en disconvenir, je crois cependant qu'il ne faudrait pas s'exagérer les obstacles, et renoncer d'avance à la tâche parce qu'on ne se croit pas de force à la mener à bien. Il faut, pour la réussite, un certain nombre de conditions : la première, et la plus importante, c'est, de la part du professeur quel qu'il soit, le goût et l'amour de l'enseignement; s'il fait sa besogne par obligation de situation, ou même par devoir et conscience, la partie est perdue avant d'être entreprise; le double courant nécessaire à tout progrès ne s'établira pas; son esprit pourra bien aller vers ses élèves; l'esprit de ses élèves n'ira pas vers lui.

En second lieu, le nombre des élèves joue aussi un rôle important; si l'effectif d'une classe dépasse une certaine limite, variable suivant les degrés de l'enseignement, il n'y a plus d'élèves, ni de professeur; il y a un troupeau et un chien de berger; d'ailleurs, soit dit en passant, tout professeur contraint à faire de la discipline est condamné par cela même à l'impuissance. Au contraire, on a souvent déclaré que si une classe a un effectif trop restreint, l'enseignement en souffre, faute d'émulation; je crois fort peu pour ma part à la

nécessité de cette émulation en matière mathématique, et l'idéal à mes yeux serait un professeur par élève; il est d'ailleurs évident que, dans l'enseignement ordinaire, la réunion s'impose, mais il est bon, encore une fois, qu'elle ne dépasse pas des limites raisonnables.

Il faut aussi que ce groupe, qu'on appelle une classe, présente une assez grande homogénéité. Sinon, l'instituteur est contraint de mesurer son enseignement sur les forts ou sur les faibles. Dans le premier cas, le découragement se produit chez ces derniers; ne pouvant plus suivre, ils désespèrent d'eux-mêmes; dans le second, c'est la tête de classe qui se trouve sacrifiée.

Les conditions normales dont nous venons de parler étant supposées remplies, il est une recommandation indispensable à faire à tout professeur. C'est, sauf de très rares exceptions, de ne pas perdre de vue qu'une science pure, au point de vue dont nous nous occupons, n'est jamais une science complète. Il suit de là que toute instruction rationnelle doit contenir, à côté des éléments eux-mêmes, des applications continuelles, dans une mesure assez discrète, mais adaptées le mieux possible aux théories. Le but de ces applications est double : tout d'abord présenter à l'élève des exercices sans lesquels une science n'est jamais vraiment assimilée; et puis, ce qui est plus important encore, fournir des occasions continuelles de rapprocher le concret de l'abstrait, de montrer comment on peut revenir de celui-ci à celui-là, ce qui est le but définitif de la science en général.

Et ce n'est pas par hasard ou par occasion seulement qu'il faudrait montrer ce rapprochement, et attirer l'attention sur les abstractions qui servent de base à la science pure ; c'est sans cesse que le côté philosophique devrait être la grande préoccupation ; et cela, dans toutes les classes, à tous les degrés, sur tous les

sujets. Les vérités générales, exposées avec une certaine habileté, mises à la portée de ceux auxquels on les présente, ont toujours un intérêt et exercent un attrait. Attirer l'attention des commençants, même des jeunes enfants, sur ces vérités-là, et les en bien pénétrer, c'est l'un des moyens les plus sûrs de leur éviter des difficultés dans le développement ultérieur de leurs études.

En dehors des idées philosophiques dont nous parlons, il est dans chaque science, et pour ainsi dire dans chaque chapitre de la science, des propositions très générales et d'un grand intérêt, en raison du nombre considérable de conséquences qui en découlent ou d'applications diverses auxquelles elles se prêtent. A ces propositions-là, un soin tout particulier doit être apporté ; il faut les mettre en vedette, les signaler, prévenir d'avance qu'on est destiné à les revoir ; et, lorsqu'on les reverra, sous dix formes, sous vingt formes différentes, ce ne sera plus alors une étude nouvelle à recommencer chaque fois, comme cela arrive trop souvent ; l'élève reconnaîtra sans peine une vieille connaissance qui se présente seulement à lui avec une toilette nouvelle, et sa mémoire ne se soumettra pas à une torture inutile.

Du reste, le rôle de la mémoire, certainement nécessaire en matière mathématique comme en toute autre, doit être réduit d'une façon générale à d'assez faibles proportions dans un enseignement rationnel. Ce ne sont pas les images, figures ou formules, dont il faut surtout laisser l'empreinte dans le cerveau ; c'est la faculté du raisonnement ; et si un élève a appris une proposition importante en y étant conduit de telle sorte qu'il l'a pour ainsi dire découverte lui-même, cette proposition sera facilement retrouvée par lui, dans le cas où il viendrait à l'oublier, car son esprit repassera sans peine par les mêmes sentiers qui l'avaient amené au but une première fois.

En un mot, c'est surtout par l'initiative personnelle que peut se faire d'une façon normale le développement de l'esprit mathématique ; initiative chez le maître, initiative chez l'élève. Le premier, il faut le reconnaître, en est souvent empêché par l'exiguïté et la raideur des programmes ; le second, de son côté, n'a généralement pas d'initiative parce qu'on ne lui en a pas communiqué le goût. Il a été exercé à travailler, à apprendre, très peu à comprendre, et pas du tout à chercher. Dans des classes peu nombreuses, composées de jeunes gens se destinant aux écoles et désireux de réussir, il est parfois arrivé que les appels réitérés d'un professeur, tendant à obtenir de ses élèves des demandes personnelles de renseignements, sont restés pour ainsi dire sans effet. C'est que, bons élèves du reste, se donnant de la peine, ces jeunes gens, depuis leur enfance, avaient été dressés en matière mathématique à apprendre toujours et jamais à penser.

Les moyens matériels, les procédés pédagogiques à mettre en œuvre pour obtenir le résultat désiré sont éminemment variables, suivant la nature des classes, l'avancement des élèves, et aussi d'après la manière de voir et le tempérament du professeur. Nous en examinerons tout à l'heure quelques-uns parmi les principaux ; mais nous tenons à insister dès maintenant sur cette proposition que, dans toutes les circonstances, rien ne peut suppléer à l'enseignement oral spontané, c'est-à-dire aux explications données à haute voix avec toute la méthode et la clarté qu'un esprit juste et une longue expérience permettent d'acquérir. Il faut en outre que fréquemment les élèves eux-mêmes, à tour de rôle, soient appelés à présenter des démonstrations ou à chercher des solutions de problèmes, autrement que la plume à la main.

Il serait indispensable d'introduire surtout dans l'enseignement oral deux coutumes qui semblent exiger du

temps, mais qui plutôt en font gagner. Une seule est en vigueur, et encore dans une mesure un peu exceptionnelle. Je veux parler de leçons d'introduction et de revision. Ces dernières seules sont appliquées, sous une forme ou sous une autre, dans quelques classes. Comme le nom l'indique, ces leçons devraient avoir pour but, une fois le cours terminé, ou mieux peut-être après chaque branche importante étudiée, de rappeler à grands traits le chemin parcouru, de montrer d'où l'on est parti, où l'on est arrivé, quelles sont les applications principales et les propositions les plus essentielles par lesquelles on est passé, laissant les autres dans une ombre relative. Lorsque la chose est possible, ce travail de revision accompli par les élèves eux-mêmes avec un temps de préparation suffisant, peut donner d'excellents résultats, en obligeant les enfants à rassembler leurs idées, à les exposer clairement, sauf à s'aider au besoin de quelques notes, et non plus à répéter purement et simplement des leçons apprises à grand renfort de mémoire. Bien entendu, le professeur intervient alors pour corriger ce qui est défectueux, ou pour présenter des remarques complémentaires.

Quant à l'innovation des Introductions, elle ne pourrait au contraire se pratiquer qu'en étant présentée par les professeurs eux-mêmes, et voici quel en serait l'objet. Avant d'aborder chaque chapitre un peu important de la science que l'on étudie, on exposerait sous une forme résumée quel en est l'objet essentiel, pourquoi ce chapitre présente un intérêt, dans quelles circonstances on pourra avoir à en faire application et comment on se propose d'accomplir l'exploration que l'on a en vue. La route étant ainsi jalonnée d'avance, la compréhension des choses sera plus naturelle, l'esprit d'initiative et de recherche s'ouvrira plus facilement, tandis que souvent des esprits, même bien doués, ne peuvent surmonter certaines difficultés ni

comprendre certains théorèmes, parce qu'ils marchent comme dans la nuit, sans fil conducteur, sans pouvoir deviner le lien qui existe entre les propositions successives qu'on fait passer sous leurs yeux. Cette pratique des leçons, ou mieux des fragments de leçons d'Introduction, serait utilement introduite dans tous les ordres d'enseignement, mais aurait surtout un intérêt spécial quand le niveau commence un peu à s'élever, et que les complications apparentes de la science peuvent masquer, dans des esprits n'ayant pas encore une préparation intellectuelle suffisante, la grande clarté et l'unité que la Mathématique présente dans toutes ses parties.

En résumé, l'enseignement doit être aussi peu dogmatique que possible, mais en même temps foncièrement philosophique. Cette conciliation de la simplicité dans la forme avec la profondeur des idées constitue l'une des qualités de l'art difficile de l'enseignement. Les Introductions peuvent aider dans une très large mesure à suppléer à cette qualité maîtresse, et contribuer même à la faire acquérir.

Dans les classes un peu élevées, on emploie beaucoup aujourd'hui le système des notes prises sur des cahiers par les élèves tandis que le professeur expose chacune de ses leçons. Ce système en soi est excellent, mais exige pour être bien pratiqué un certain apprentissage, l'habitude d'une écriture rapide et claire, et une maturité relative de l'esprit; et ce serait peut-être un tort de l'employer trop exclusivement. Dans les classes d'élèves tout jeunes, il serait certainement impraticable comme procédé unique. Du reste, en ces matières l'esprit d'exclusivisme et de système est déplorable; c'est par des essais partiels discrètement tentés qu'un professeur digne de ce titre arrive à perfectionner sans cesse son outillage pédagogique.

Je ne parlerai, dans cet ordre d'idées, ni des devoirs

écrits, ni des compositions plus ou moins fréquentes qu'on peut donner aux élèves, ni des interrogations à leur faire subir en dehors des leçons. Tous ces accessoires de l'enseignement sont bons, sont même excellents à tous les degrés, pourvu que l'ensemble de ces moyens divers soit bien harmonieusement combiné.

Au lieu de notes prises au cours, un certain nombre de professeurs avaient, pendant d'assez longues années, adopté l'usage — qui n'est peut-être pas encore proscrit partout — de dicter textuellement un cours que les élèves devaient reproduire. Rien n'est plus formellement contraire à l'esprit de l'enseignement mathématique. Cette manière rigide de présenter les vérités dont se compose la science est de nature à solliciter sans cesse les facultés de la mémoire, au préjudice de celles du raisonnement, et c'est justement le résultat contraire qu'il faudrait obtenir.

La forme sous laquelle on peut faire garder aux élèves, dans les commencements surtout, des traces sensibles de ce qui leur a été enseigné, est assez difficile à trouver d'une façon générale ; je crois cependant que des rédactions bien suivies, bien coordonnées et rectifiées par le maître, seraient incontestablement supérieures à ces cahiers dictés, constituant le pire des systèmes. Ajoutons que l'enfant doit être préparé le plus tôt possible à l'art de prendre des notes, et qu'on peut l'y amener graduellement en lui faisant justement exécuter ses rédactions sur les notes qu'il a prises lui-même.

Autrefois, au lieu de cahiers dictés, on avait un autre système, peu recommandable encore, mais cependant moins mauvais : c'était l'étude d'un livre ; ce livre, adopté pour une classe, faisait le fond de l'enseignement ; chaque jour on en découpait une petite tranche, et le rôle du professeur se bornait pour ainsi dire à un simple commentaire. Je ne m'arrêterai pas à ce système

abandonné, et plus impraticable que jamais avec l'essor des publications classiques. Comme, s'il y a beaucoup de bons livres, il n'y en a aucun de parfait, le système en question n'est évidemment pas soutenable ; mais il est permis à ce propos de se demander quel rôle les livres doivent jouer dans l'enseignement mathématique et quel secours ils peuvent apporter. Or, il semble qu'en général les choses soient organisées juste au rebours de ce qu'indique la raison. Dans les classes inférieures, pour la première initiation, l'intervention du livre est bien rarement utile ; l'enseignement doit être vivant, varié, familier, provoquer incessamment l'esprit ; et la parole figée dans un livre produit exactement l'effet contraire. C'est donc là que le livre devrait être tout au plus réduit au rôle de très humble auxiliaire d'occasion ; et c'est là justement qu'il règne d'une façon quasi souveraine.

Dans les classes relativement élevées, au contraire, les notes du cours, telles qu'elles ont été prises, forment le recueil sur lequel on travaille ; mais des erreurs ont été commises, des lacunes subsistent ; il y a des aperçus sommaires qui ont été donnés sur des sujets qu'un élève studieux serait heureux de connaître plus complètement. Des livres seraient donc utiles comme recueils de renseignements complémentaires des notes. Il n'est certes pas défendu d'en faire usage ; mais dans les classes dont je parle, et qui préparent habituellement aux grandes Écoles, le surchauffage des candidats est tellement bien organisé que l'usage des livres se réduit à peu près à rien, par cette bonne raison que les élèves n'ont pas le temps. Pour le succès dans les concours, il peut être bon que les choses se passent ainsi ; pour l'éducation mathématique de l'esprit, c'est déplorable. On pourrait dire que nos candidats sont prodigieusement instruits ; ils savent tant de choses qu'ils n'ont le temps de n'en comprendre aucune. Le délaissement des livres dans les classes mathématiques un

peu supérieures n'a pas d'autre cause ; et de ce fait on ne peut guère blâmer personne ; c'est la fatalité même de l'organisation des concours qui amène ces résultats. On pourrait cependant les atténuer.

Une autre calamité, à laquelle il serait plus facile de remédier, est la mobilité, l'inconsistance des programmes de concours, variant d'une année à l'autre, bouleversant tout, faisant des coupes sombres à travers la science, pour y ajouter le lendemain une théorie plus ou moins difficile qui y figurait la veille ; tout cela sans suite, sans méthode, sans raisons données, souvent sans prétexte.

Un programme est toujours mauvais, uniquement parce que c'est un programme. Mais comme c'est un mal nécessaire, il faudrait du moins, lorsqu'on a eu la chance d'obtenir le minimum d'inconvénients, en rester là et ne plus toucher à ce programme idéal qu'avec une discrétion extrême et quand des raisons scientifiques y obligent impérieusement. Avec un peu de bonne volonté, il ne serait pas difficile d'en revenir là.

Une autre espèce de programmes, n'ayant d'ailleurs de commun que le nom avec ceux dont nous venons de parler, c'est celle des programmes trop souvent imposés aux professeurs de l'enseignement public avec une minutie manifestement exagérée. C'est de la sorte que chez un trop grand nombre d'entre eux se trouve amoindri, sinon détruit, cet esprit d'initiative sans lequel l'enseignement perd toute vie et toute flamme, et que nous avons reconnu comme la première des vertus pédagogiques. Des indications générales très larges seraient bien suffisantes.

Si, malgré toutes ces entraves et tant de défauts de détail, nous obtenons encore en France les petits résultats que nous pouvons constater, cela révèle les belles qualités de conscience, de zèle et de connaissances acquises qui distinguent à un si haut degré le corps

enseignant. Mais on s'attriste quand même en pensant à tant de force perdue; et l'on regrette de ne pas voir toute cette enfance et cette jeunesse française recevoir dans la mesure où c'est possible la forte et solide éducation mathématique qu'il serait si facile de lui donner sans plus de frais, en se décidant tout simplement à laisser agir les forces bienfaisantes dont on dispose, et à faire circuler la vie dans une région où elle semble suspendue. Peut-être, s'il en était ainsi, aurait-on de la Mathématique une appréciation générale un peu moins inexacte.

Il me resterait encore bien des questions à indiquer, sur la fréquence et la durée des leçons, notamment, et sur l'âge auquel peut être efficacement entreprise l'éducation mathématique. Les opinions sont variables sur ces divers points, et toute opinion absolue risquerait d'être erronée. Il faut bien du reste se plier, suivant les cas, aux nécessités des autres parties de l'enseignement, et aussi aux conditions extérieures, lesquelles ne permettent pas toujours de faire ce qui pourrait sembler théoriquement préférable.

Sur un point cependant, une observation me semble indispensable. Dans quelques classes où se trouvent des commençants, on a imaginé d'introduire des leçons de mathématiques à raison de deux, quelquefois même d'une par semaine. Un pareil procédé est tout à fait irrationnel et représente simplement du temps perdu. Comment veut-on, à de très rares exceptions près, que le cerveau d'un enfant reçoive l'empreinte de ces notions, nouvelles pour lui, et les conserve pendant une aussi longue période ? La continuité est un des facteurs nécessaires de l'enseignement scientifique. Avec la méthode dont nous parlons, l'enfant oublie d'une semaine à l'autre; ayant oublié, il ne sait plus, quand même il ferait tous ses efforts, et il cesse de prendre le moindre intérêt à des études auxquelles il serait indispensable de l'attacher chaque jour un peu plus. On peut dire sans

crainte de se tromper qu'en Mathématique, trois leçons par semaine représentent un extrême minimum. Tant qu'on ne peut pas en arriver là, mieux vaudrait différer d'une année, de deux années au besoin, l'initiation mathématique, et occuper à autre chose ces jeunes esprits, plutôt que de leur donner ce premier enseignement sous une forme décourageante pour eux en même temps que pour l'éducateur, et fatalement stérile dans tous les cas.

CHAPITRE II

Enseignement de l'Arithmétique

L'Arithmétique, nous l'avons vu précédemment, comprend deux ordres d'idées très distincts, même dans sa partie la plus élémentaire : le calcul et la théorie. Or, s'il est exact que les règles des opérations les plus simples exigent pour être justifiées des raisonnements dont l'exposé n'est pas toujours simple ni facile, la possibilité d'exécuter couramment ces opérations d'une façon pratique n'en existe pas moins. Et comme cette pratique des opérations du calcul arithmétique a un intérêt de premier ordre dans les diverses circonstances de la vie; comme, d'un autre côté, cette habitude du calcul est l'un des éléments précieux d'une bonne continuation des études arithmétiques, on voit qu'il y a dans l'ordre d'idées que nous indiquons la matière d'une branche de l'enseignement mathématique, branche bien importante puisqu'elle réagira plus tard sur toutes les autres.

Les premières notions du calcul peuvent être utilement données aux enfants, à la même époque où on leur donne les premières notions de lecture et d'écriture. Ce n'est pas, bien entendu, sous une forme abstraite qu'un tel enseignement peut être distribué ; ce n'est pas même par des leçons, mais par de véritables jeux. Les dominos, les lotos, les billes, toutes ces collections concrètes d'objets, permettent d'apprendre à l'enfant à compter, à

lui faire opérer sans qu'il s'en doute les abstractions naturelles indispensables. Par la manipulation des objets, il est bientôt initié aux principes de la numération, sans même que ces principes soient formulés ; peu à peu, et sous une direction intelligente, il arrive à faire avec une certaine sûreté les opérations les plus simples ; il commence à écrire les nombres ; il s'exerce au calcul mental, si important pour le développement des facultés arithmétiques. Et dans tous ces exercices, présentés comme des récréations, le jeune élève trouve un attrait ; sa curiosité s'éveille, il désire aller chaque jour un peu plus loin que la veille.

Un savant de très grand mérite, Édouard Lucas, dont nous avons déjà parlé, s'est vivement intéressé à cette question du premier enseignement de l'Arithmétique. Ce fut, de tous les Français, dans la dernière partie de ce siècle, celui qui connaissait le mieux l'Arithmétique, qui produisit les plus profonds travaux sur la Théorie des nombres, ce qui ne l'empêchait pas de s'attacher avec une sollicitude extrême à ce qui concerne la première initiation au calcul. Dans un très remarquable discours prononcé par lui, en 1889, à la distribution des prix du lycée Saint-Louis, après avoir développé les idées que je me suis attaché à résumer plus haut, voici comment il s'exprime :

« Il ne faut dans aucun cas que l'écolier apprenne du fait de mémoire des Tables d'addition ou de multiplication, ou des résultats quelconques, sans les avoir obtenus directement ; l'enfant doit les trouver lui-même, car son esprit est une force latente, à laquelle il suffit d'imprimer et de diriger le mouvement. »

Toutes ces idées, comme il le rappelait, sont dans leur essence celles qu'exposait La Chalotais en 1763, dans son *Essai d'éducation nationale ou plan d'études pour la jeunesse*. Mais hélas ! que de progrès il faudrait souvent accomplir pour remonter d'un siècle et

plus en arrière ! Et combien est grande la déception quand on compare ce qui devrait être, ce qui pourrait être, et ce qui est ! Cependant, comme les développements que je présente ici ont pour but de provoquer quelques progrès partiels, d'où résulteront peut-être d'autres progrès plus importants, je crois qu'il ne faut pas se décourager, et je demande à insister encore.

Voici comment Lucas indique la construction possible d'une Table de multiplicaiion par un enfant. Ayant rangé dans leur ordre les 90 boules d'un jeu de loto, il les retire de 2 en 2, et il obtient ainsi les multiples de 2, c'est-à-dire les nombres qui doivent figurer dans la deuxième colonne de la Table ; puis, replaçant les boules, et recommençant l'opération analogue, mais de 3 en 3, il a les nombres de la troisième colonne, et ainsi de suite.

Il n'est pas difficile d'imaginer des procédés semblables pour les Tables d'addition ; ces diverses tables peuvent être poussées beaucoup plus loin qu'on ne le fait d'habitude, et l'enfant qui les a construites ne les oubliera certainement pas. On voit que le papier quadrillé, au point de vue matériel, est appelé à jouer un rôle important dans cette première partie de l'enseignement. C'est une importance qui n'est pas destinée à s'amoindrir à mesure qu'on progresse, car on pourrait presque affirmer que cet outillage est aussi nécessaire à l'auditeur des cours les plus élevés de nos facultés qu'au petit enfant formant pour la première fois ses chiffres. C'est là, je le devine, une assertion et une opinion qui feront sourire plus d'un professeur. Que d'objets d'apparence puérile, cependant, sont appelés à des applications d'une extrême importance ! Mieux vaut réfléchir et raisonner que de rejeter sans examen ; mieux vaut surtout expérimenter, alors que l'expérience coûte si peu.

J'ai un peu insisté, à dessein, sur l'initiation première ; elle doit être entreprise de bonne heure, et poursuivie méthodiquement à mesure que les années s'écoulent, avant que l'on n'aborde l'enseignement scientifique et raisonné. Il est possible, dans cette voie, et en sachant utiliser toutes les occasions qui se présentent, en conservant toujours à la pratique du calcul un caractère récréatif, d'aller beaucoup plus loin qu'on ne pense. Non seulement l'enfant pourra faire avec sûreté les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, non seulement il aura pris du calcul mental une habitude suffisante pour être capable de pratiquer les opérations dans des cas relativement simples sans aucun secours matériel, mais il aura été possible de l'initier aussi, sans même qu'il soit nécessaire d'en prononcer le nom, à bien des calculs sur les progressions, par différence ou par quotient, sur la formation des carrés, sur des exemples simples d'analyse combinatoire, sur les premières puissances d'un binome, qu'on obtient en multipliant simplement le nombre 11 par lui-même, et sur bien d'autres sujets encore. Tout cela semble être du rêve, et je sens bien qu'aux yeux de beaucoup de lecteurs, c'est une thèse paradoxale que je soutiens en parlant ainsi. J'ai cependant la conviction raisonnée — et appuyée sur des faits — que cette thèse est la vérité même, et que de cinq à dix ans, par exemple, on pourrait obtenir de l'enfant, dans ce domaine du calcul pratique, des résultats qui nous paraissent prodigieux et qui au fond sont tout naturels. A une condition, cependant : c'est de suivre une méthode rigoureusement expérimentale et de ne pas s'en départir ; de laisser l'enfant, en présence des réalités concrètes qu'il touche et qu'il voit, faire lui-même ses abstractions ; de ne *jamais* essayer de rien lui démontrer ; de se borner à lui fournir les explications qu'il se trouvera conduit à solliciter de lui-même ; de conserver enfin à cet enseignement du calcul une apparence d'amusement, et non pas celle d'un tra-

vail imposé. Si la fatigue cérébrale se produit ; si l'on veut contraindre un jeune enfant à fixer son attention sur des sujets qui ne l'intéressent pas et à comprendre des raisonnements au-dessus de son âge, alors le but est manqué, le résultat est... ce que nous avons aujourd'hui, c'est-à-dire une population scolaire sachant mal calculer, pas préparée aux études futures, et associant d'avance au mot « Mathématique » l'idée de fatigue et d'ennui.

Le malheur, c'est que la réforme à faire dans ce sens exigerait une transformation radicale des cerveaux et l'abandon d'habitudes invétérées ; aucun livre d'étude ne peut contribuer à en hâter l'accomplisssement, puisqu'il s'agit justement alors de ne jamais placer un livre entre les mains de l'enfant. Ce sont les maîtres qu'il faudrait transformer ; or, quand on a reçu un enseignement mal compris et déraisonnable, il est difficile de s'en rendre compte plus tard. C'est pour cela qu'il s'écoulera peut-être un temps bien long avant que les idées de La Chalotais rencontrent le milieu dans lequel elles sont destinées à fructifier et à produire les heureux résultats qu'on est assuré d'en tirer, le jour où on les appliquera.

Malgré tout, bien ou mal, dans des conditions quelconques, l'enfant a appris à calculer un peu ; les années se sont écoulées, et il atteint l'âge où l'on va commencer à lui enseigner l'Arithmétique.

C'est alors qu'il est essentiel de lui montrer dès le début comment il a procédé lui-même sur les quantités concrètes, comment il a fait ses abstractions, de lui donner d'une façon nette et par des exemples répétés la notion du nombre, sous forme abstraite ou concrète. Il convient alors de reprendre les opérations avec lesquelles il est familier déjà, et de lui en montrer le « pourquoi ». La numération, les diverses opérations simples de l'Arithmétique exigent alors le développe-

ment d'explications et de raisonnements dans lesquels on ne fera quelque progrès qu'à la condition de provoquer constamment l'élève, comme nous l'avons indiqué avec tant d'insistance, à aller au-devant de ses raisonnements. La chose n'est pas toujours facile, car la théorie de la division, tout simplement, est délicate à comprendre et d'une exposition malaisée pour un jeune esprit peu familiarisé avec le maniement du langage scientifique. Il faut bien remarquer cependant que la connaissance préalable du calcul simplifie de beaucoup la tâche.

Les principes dont il y a lieu de s'inspirer, dans cette première période de l'enseignement scientifique de l'Arithmétique, sont surtout les suivants : insistance sur les idées générales ; introduction, dès le début, de la notion de rapport; rapprochement continuel entre les résultats auxquels conduit le raisonnement et les procédés préalablement connus qu'on a rencontrés dans la pratique du calcul; applications nombreuses, continuelles, simples d'abord, et dans tous les cas se rapportant directement aux théories que l'on traite.

C'est de la sorte qu'on pourra successivement passer du calcul pratique au calcul raisonné, montrer comment l'idée du nombre s'étend et se généralise, arriver à la génération des fractions, en s'attachant surtout aux fractions décimales, à la formation des puissances, à l'extraction des racines, en rencontrant par occasion des notions d'Arithmologie, sur les nombres premiers et premiers entre eux, par exemple, qu'on doit donner avec un soin extrême, tout en les restreignant rigoureusement à ce qui est nécessaire pour la suite du calcul raisonné.

Bien entendu, dans un tel enseignement rationnel, les progressions, et surtout les progressions composées de termes entiers, doivent être introduites. On ne peut comprendre pour quels motifs des sujets exclusivement arithmétiques comme ceux-là, et qui jadis étaient placés

à leur vrai rang, ont été relégués dans d'autres parties de l'enseignement, c'est-à-dire dans l'Algèbre.

Il est clair que dans tout le cours de cet enseignement arithmétique, l'usage des lettres devra être introduit chaque fois que cela pourra faciliter les raisonnements ou la recherche des solutions. Nous avons vu que ce n'est là en aucune façon un empiétement sur l'Algèbre, qui se distingue par des caractères d'une tout autre nature.

L'Arithmétique ne peut être complètement exposée si l'on n'y fait pas figurer la théorie des approximations, sur laquelle nous avons déjà tant de fois insisté. Par de nombreuses applications, il est possible de rendre claire cette théorie, qui n'est certainement pas exempte de difficultés, et cela sans quitter le domaine élémentaire; on arrive aussi par ce moyen, et à force de multiplier les exemples, à en rendre l'usage familier, ce qui est au moins aussi utile que de bien posséder la doctrine elle-même. Rien n'est plus indispensable que cette étude comme préparation générale permettant d'aborder plus tard avec sûreté les parties plus étendues de la science.

On doit faire rentrer encore dans l'enseignement de l'Arithmétique, mais à titre de compléments, et lorsque le moment en est venu, certains calculs spéciaux, tels que les constructions de tables, le calcul des différences au point de vue de ses applications numériques, la résolution numérique de quelques équations.

Enfin, en dehors des premières notions d'Arithmologie indiquées plus haut et qui sont rigoureusement indispensables, on doit ne pas hésiter à donner quelques indications sur un certain nombre de questions intéressantes, telles que les fractions périodiques et leur généralisation, les systèmes de numération en général, les théorèmes les plus simples sur les nombres premiers, et les notions les plus élémentaires sur les congruences.

Il va de soi que tout cet enseignement doit être échelonné sur un assez grand nombre d'années, et se combiner avec celui des autres branches de la science mathématique. Il ne faut jamais perdre de vue que les sciences sont destinées à s'entr'aider, à se compléter les unes les autres; si bien qu'on ne s'assimile convenablement aucune d'elles sans avoir des notions de celles qui y confinent.

L'enseignement arithmétique, notamment, dès qu'on aura franchi les premiers degrés, tirera grand profit des premières notions d'Algèbre et de Géométrie. Il doit donc être bien entendu, sans que nous ayons besoin d'y revenir désormais, que l'Algèbre et la Géométrie prendront place dans l'enseignement mathématique général, et d'une façon à peu près simultanée, aussitôt que les théories arithmétiques auront été poussées au point voulu pour rendre les premiers principes intelligibles.

Je ne dirai que peu de mots de ce qui touche l'enseignement élevé de l'Arithmologie. Ainsi que je l'ai fait remarquer déjà, on ne saurait guère formuler de règles générales lorsqu'il s'agit d'un enseignement donné à des hommes, non plus à des enfants, et qui porte sur les hautes régions de la Mathématique. Là, le professeur doit être un savant, et non plus seulement un pédagogue; ce qu'il peut faire de mieux, c'est d'exposer surtout ses propres travaux, de montrer comment ils se rattachent à l'ensemble de la science, et de quelle manière ils peuvent devenir la source de nouveaux progrès.

Tout ceci est plus particulièrement vrai en Arithmologie; car si cette science a été enrichie par les travaux des plus illustres géomètres, elle manque cependant plus que toute autre de ces méthodes générales qui caractérisent une doctrine. On pourrait dire à ce point de vue que la Théorie des nombres est encore dans l'enfance; malgré cela, les propositions qu'elle présente

exercent un attrait tout particulier sur l'esprit de ceux qui la cultivent, et elle mériterait une sollicitude plus large que celle dont elle est généralement l'objet.

Dans cet ordre d'idées, il est permis de trouver regrettable pour notre pays le délaissement dans lequel est tombé en France l'enseignement de l'Arithmologie. De grands esprits, parmi nos compatriotes, tels que Fermat, Legendre, Cauchy, Lamé, Liouville, Lucas, ont apporté à cette science de larges contributions ; ce fut pendant longtemps une science française, malgré l'empreinte si profonde qu'y a laissée le génie de Gauss. Et cependant, pas une chaire de Théorie des nombres n'existe en France ; pas un livre français ne l'expose, car celui de Lucas, publié sous ce titre, est malheureusement resté inachevé après la mort de l'auteur. Et comme conséquence, il est impossible à un jeune savant, parmi nos compatriotes, d'apprendre cette partie de la science, sinon en étudiant les publications étrangères. Il est juste de reconnaître d'ailleurs que l'enseignement de la Théorie des nombres serait difficile à rétablir en France actuellement, faute d'un professeur. Mais il n'est pas interdit d'espérer une renaissance, et de la souhaiter prochaine.

CHAPITRE III

Enseignement de l'Algèbre et du haut calcul.

En Algèbre comme en Arithmétique, la pratique du calcul a une importance préliminaire capitale ; mais ce calcul ne saurait être enseigné par les mêmes moyens ; il exige, seulement pour qu'on en comprenne l'utilité possible, des notions générales correspondant à un certain état d'avancement de l'esprit. Cela n'empêche pas que c'est par là qu'il convient de débuter, mais en se bornant aux opérations rigoureusement élémentaires ; les autres seront étudiées plus tard, à leur tour, à mesure qu'elles se présenteront comme une nécessité.

Le meilleur moyen de présenter les premières opérations du calcul algébrique, c'est à mon avis d'invoquer les notions d'Arithmétique que l'élève possède déjà, en attirant son attention sur l'avantage qu'il y aurait, dans la solution d'une question, à savoir une fois pour toutes les opérations qu'il y aura lieu de faire pour obtenir le résultat. La distinction des données et des inconnues, les procédés habituels de représentation des quantités par des lettres, le rappel des principaux signes d'opérations, qu'on a déjà plus ou moins rencontrés en Arithmétique, découlent de là d'une façon assez naturelle, et permettent d'exposer sans trop d'efforts le premier vocabulaire des termes algébriques que l'on doit employer le plus souvent. Les opérations

proprement dites étant alors entreprises, la soustraction permet sans plus tarder d'ouvrir une large parenthèse sur les quantités négatives et les nombres négatifs, et de jeter ainsi, dès le début, dans l'esprit du commençant, des idées nettes, et surtout des idées simples qu'il reprendra plus tard avec grand profit. Dans ce but, il faut, sans nulle hésitation, se servir de toutes les ressources que l'élève peut avoir déjà sous la main, et spécialement de la représentation géométrique; celle-ci n'exige rien autre chose que la notion de la ligne droite, et elle a le grand mérite de fournir l'occasion d'insister sur la continuité des grandeurs, sans avoir besoin de se lancer dans des considérations obscures ou compliquées.

Il n'y a d'ailleurs aucun inconvénient, bien au contraire, à montrer ici comment on procède pour passer des grandeurs aux signes qui les représentent, et à indiquer comment une grandeur concrète quelconque arrive à pouvoir trouver sa représentation dans un signe déterminé, la réciproque n'étant pas vraie, car elle dépend de la nature concrète des grandeurs. Toutes ces idées philosophiques, à la condition d'être amenées avec discrétion et méthode, sans appareil ni solennité, mais au contraire comme remarques toutes naturelles, sont plus qu'utiles; elles sont indispensables pour une compréhension convenable du développement ultérieur de la science.

Sur de telles bases, il est possible de poursuivre les quatre opérations fondamentales, d'une façon rationnelle, et de les étendre aux fractions algébriques; ce n'est plus seulement la pratique et l'habitude du calcul algébrique qu'il s'agit d'inculquer à l'élève, mais en même temps on l'accoutume à raisonner d'une façon rigoureuse, à comprendre les motifs de chacune des règles qu'on lui apprend, ou plutôt qu'on lui fait deviner au fur et à mesure. La multiplication et la division sur-

tout offrent l'occasion de mettre en lumière de nombreuses identités dont l'emploi sera très fréquent ; c'est un grand tort de les passer sous silence, ou de les reléguer, comme on le fait si fréquemment, dans des chapitres ultérieurs. Il est bon de parsemer cette première partie de l'enseignement d'applications incessantes, et d'aborder sans crainte certains calculs tels que les puissances successives d'un binome, les progressions, sans attendre plus longtemps, dût-on y revenir plus tard.

Un seul exemple fera comprendre ma pensée sur ce point, et montrera quelle incohérence règne en général dans l'enseignement des premiers éléments de l'Algèbre. La division algébrique conduit à l'identité

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + - - - + x + 1,$$

d'ailleurs facile à établir, et qu'on trouve dans presque tous les cours. Or, en général, lorsque plus tard on cherche la somme des termes de la progression

$$1, \ q, \ q^2, \ldots . q^{n-1}$$

on se donne la peine de faire une démonstration spéciale pour établir que cette somme est $\frac{q^n - 1}{q - 1}$. N'est-ce pas cependant la même vérité que tout à l'heure, à cette seule différence près qu'on a changé la lettre x en q ? On surcharge ainsi la mémoire, on ne montre pas le lien qui existe entre des chapitres identiques sous des apparences différentes, on engendre le dégoût qui suit le défaut de compréhension générale. Et l'on pourrait facilement citer bien d'autres exemples Le plus triste, c'est que ces habitudes vicieuses sont invétérées à un tel point que l'on se trouve contraint de s'y conformer dans l'enseignement, alors même qu'on les juge à leur exacte valeur. Les programmes ne permettent guère d'agir autrement. Mais ici, nous sommes plus à l'aise pour exposer ce qui nous paraît critiquable.

Arrivé au point que nous avons indiqué, c'est-à-dire une fois en possession du calcul algébrique élémentaire, l'élève peut aborder l'étude des équations algébriques, dont il n'a pas jusqu'ici entendu même prononcer le nom. Il est essentiel de lui expliquer alors, et sans aucun détour, comment les équations s'introduisent, quelle en est l'origine, en exposant à grands traits sur les fonctions les idées générales que nous avons trop souvent rappelées dans les pages qui précèdent pour qu'il soit nécessaire d'y revenir. Les opérations générales sur les équations, sur les transformations qu'on peut leur faire subir, permettent d'arriver ensuite à l'étude des équations et des systèmes d'équations du premier degré, ainsi qu'à celle des inégalités.

Remarquons bien cependant la nécessité de savoir se restreindre, et de proportionner l'enseignement à l'avancement intellectuel des élèves auxquels on s'adresse. Si l'on voulait ici pousser un peu loin l'étude des équations du premier degré, on se trouverait conduit à l'exposition délicate de la théorie des équations linéaires, c'est-à-dire, par contre-coup, à celle des déterminants, qui demande plus d'habitude préalable du calcul et plus d'instruction acquise. Dans une première étude comme celle-ci, il est donc nécessaire de présenter seulement des exemples simples, s'étendant à des systèmes à trois inconnues, ou à quelques exercices très particuliers dans lesquels ce nombre trois se trouverait surpassé.

Tout ce chapitre des équations du premier degré resterait lettre morte et représenterait presque un travail inutile, pour l'élève comme pour le maître, si des applications continuelles ne venaient l'éclairer et en diminuer l'aridité. Les problèmes méritent d'ailleurs une attention spéciale, et prêtent à des remarques qu'on peut produire une fois pour toutes, qui feraient l'objet d'une ou de plusieurs leçons très utiles, et que d'habitude on ne rencontre nulle part. C'est peut-être la première et la plus simple occasion qui soit offerte pour faire aisé-

ment comprendre le but général de la science mathématique et ce que c'est que le retour de l'abstrait au concret, qui se présente ici sous la forme de discussion des solutions.

Avant d'aborder les équations du deuxième degré, quelques notions nouvelles de calcul sont nécessaires. C'est ici que viennent prendre place la théorie de la racine carrée, les notions sur les radicaux du deuxième degré, comme préparation aux équations elles-mêmes. Dans l'enseignement ordinaire, surtout tel qu'on le comprenait il y a peu d'années encore, cette étude du second degré et des questions qui s'y ramènent se trouvait accompagnée de certaines considérations particulières sur les maximums ou les minimums, abordables par les équations du second degré, mais très artificiellement, et sous une forme fort peu philosophique. Puis s'introduisaient ensuite les progressions, les logarithmes, avec quelques applications, et le domaine de l'Algèbre élémentaire était de la sorte totalement exploré.

Malgré quelques réformes partielles, l'état actuel de l'enseignement présente encore dans cette partie trop de lacunes et de contradictions fondamentales pour que nous puissions nous dispenser de présenter certaines observations.

Tout d'abord, on court pour ainsi dire au-devant des difficultés relatives aux imaginaires, et on les rend insolubles pour les élèves, en ne présentant pas nettement cette théorie à l'occasion de l'extraction de la racine carrée. Il n'est pas plus difficile de le faire qu'il ne l'est de parler, à propos de la soustraction, de la théorie des quantités négatives. Et non seulement ce n'est pas difficile, mais c'est de nature à préparer utilement les études ultérieures, si l'on profite de la circonstance pour donner les premières notions sur les quantités géométriques, pour insister sur l'extension nécessaire

de la notion des opérations, à mesure que les symboles s'appliquent à de nouvelles quantités. Dès lors on s'aperçoit aisément que les imaginaires sont des quantités tout aussi réelles que les autres, et on en établit les règles de calcul avec une simplicité extrême, une netteté d'exposition qui frappe l'esprit, garantit contre les défaillances possibles de la mémoire, et permet de retrouver, de réinventer la théorie, si par hasard cette défaillance se produisait.

En s'y prenant ainsi, les solutions des équations du deuxième degré n'ont plus à être interprétées. Elles se présentent d'une façon absolument uniforme et générale; tout s'éclaire et se simplifie. Je conclus donc qu'un exposé des premiers principes de la théorie des quantités géométriques, conforme aux doctrines de Cauchy et de Bellavitis, pour ne citer que deux noms illustres, devrait prendre place immédiatement avant l'étude du deuxième degré.

Mais je poursuis. Voici les maximums et les minimums qui apparaissent à une place où l'on ne peut même pas les définir. On veut étudier l'un des points délicats des variations de fonctions, sans avoir prononcé le mot de fonctions, et on y arrive par une suite de procédés artificiels, par la solution de problèmes isolés les uns des autres. Est-ce donc là une méthode scientifique ? En continuant la lecture de notre programme, nous rencontrons l'étude des logarithmes; et l'on prétendrait étudier sérieusement cette fonction logarithmique, sans dire même en quoi consiste la continuité. Tout cela, pour éviter l'introduction de notions beaucoup plus faciles, précieuses entre toutes, mais que, par convention, on a rejetées de l'enseignement élémentaire.

Le bon sens indique cependant qu'il n'y a pas à hésiter sur l'introduction du calcul des dérivées (1) dans

---

(1) C'est à dessein que je n'ai mentionné nulle part, soit précédemment, soit ici, les fonctions continues sans dérivées, qui ont fait quelque bruit

l'enseignement de l'Algèbre, en se bornant bien entendu aux éléments les plus simples et aux applications les plus directement indiquées. Ces notions, placées après les équations et les problèmes du deuxième degré, permettent d'aborder très naturellement l'étude des maximums et des minimums.

En invoquant aussi la simple définition des coordonnées, qui seule permet la représentation graphique des fonctions, il est alors assez facile d'étudier, non seulement la fonction logarithmique, et aussi les exponentielles, d'une façon claire au lieu de se perdre dans la confusion des symboles, mais encore quelques fonctions simples, par exemple les fonctions circulaires, qui seront d'une continuelle application.

Bien entendu, les notions géométriques, acquises par l'élève préalablement, permettent une telle exposition et lui donnent un caractère complètement naturel. Il va de soi, comme nous l'avons indiqué à plusieurs reprises, que les diverses branches de l'enseignement mathématique doivent être suivies parallèlement, de manière à s'appuyer réciproquement les unes sur les autres.

J'en ai dit assez sur l'enseignement de l'Algèbre élémentaire pour que ma pensée soit clairement et complètement comprise. Ce n'est là qu'une sorte d'Introduction ; et les jeunes gens qui peuvent pousser plus loin auront bien d'autres notions à acquérir. On a classé fréquemment ces notions en deux grandes catégories :

---

naguère dans la science. Tout au plus quelques notions à ce sujet peuvent-elles être utilement données dans les plus hautes régions de l'enseignement, lorsque l'esprit est déjà formé, qu'aucune confusion n'est à craindre. Mais chez des jeunes gens dont l'éducation mathématique n'est pas faite, ces aperçus, forcément incomplets, risquent d'engendrer le scepticisme et l'hésitation sans aucun profit. Il s'agit d'une conception nouvelle de l'idée de fonction ; et dans l'enseignement moyen, il serait facile de tourner la difficulté, à supposer qu'elle existe, en ajoutant à la définition d'une fonction continue la condition d'admettre en général une dérivée, et en laissant de côté l'étude des fonctions qui ne rempliraient pas cette condition.

Algèbre de mathématiques spéciales, Algèbre supérieure. Il faut d'autant moins chercher quelque sens précis, sous ces appellations bizarres, que la première tout au moins ne représente rien de stable ; une théorie, une proposition particulière sont introduites dans le programme de mathématiques spéciales ; après quelques années de présence, elles disparaissent (pour se réfugier sans doute dans l'Algèbre supérieure) et font place à une théorie d'Algèbre supérieure, qui descend en spéciales, jusqu'au jour où viendra se produire une nouvelle permutation en sens inverse. Comment savoir, dans une telle classification, où l'on devrait ranger les fractions continues, la théorie des formes, la décomposition des fractions rationnelles, le théorème de Sturm, le théorème fondamental sur la théorie des équations (dit théorème de d'Alembert) ?

Mais à côté de ces perturbations capricieuses de l'enseignement, il y a, en Algèbre comme partout, deux catégories de notions bien distinctes : celles qui répondent à des théories achevées, complètes, sur lesquelles la science a trouvé sa formule définitive ; et celles qui provoquent encore chaque jour des travaux de la part des savants. Les dernières ne peuvent relever que du haut enseignement ; nous ne nous y arrêtons pas ; quant aux premières, elles représentent un vaste champ de connaissances dans lesquelles un enseignement moyen rationnel doit glaner, en choisissant les chapitres dont les applications sont les plus générales, ou qui sont de nature, par les questions qui s'y trouvent soulevées, à projeter sur l'ensemble de la science la plus grande somme de clarté.

Dans un tel ordre d'idées, la théorie des Déterminants et des Équations linéaires, la théorie générale des équations (y compris le théorème fondamental), l'étude de la décomposition des fractions rationnelles, et un complément aux premières notions sur les dérivées, me semblent ne pouvoir donner matière à aucune con-

testation sérieuse, et constituent les éléments nécessaires d'une instruction mathématique moyenne. Il y a lieu d'y ajouter, bien que rigoureusement ceci n'appartienne plus au domaine exclusif de l'Algèbre, des connaissances assez complètes sur les premières notions du calcul infinitésimal et ses applications. Ce serait en effet une conception extraordinaire que de laisser dans un enseignement le fond même des idées sur lesquelles repose le calcul infinitésimal, sous le nom de théorie des dérivées, et d'en proscrire ce qui tend à rendre ce calcul facilement applicable et maniable, c'est-à-dire la notation différentielle. Des contradictions pareilles ne sauraient être durables, quand par malheur elles se produisent.

Quel que soit, en tout cas, le programme auquel on aura cru devoir s'arrêter à un instant donné, les règles à adopter pour en assurer le développement rationnel sont toujours invariablement les mêmes. Les élèves ont beau se trouver en possession d'une maturité intellectuelle supérieure, il n'importe pas moins de mesurer l'enseignement à leur force, de présenter même les théories difficiles sous la forme la plus simple, de ne jamais reculer devant les idées générales, de multiplier les applications, de solliciter sans cesse la curiosité scientifique, et surtout d'attirer l'attention sur les idées qui se représentent dans plusieurs circonstances diverses, afin d'éviter chaque fois la dépense d'un effort intellectuel inutile, qui peut être mieux employé.

Quant au Calcul infinitésimal proprement dit, il forme, en y adjoignant certains chapitres du Calcul des fonctions, empruntés aux parties de cette science pour lesquelles la doctrine est définitivement établie, une branche importante de l'enseignement donné dans les Facultés, les Universités, et en France dans les grandes Écoles. Cet enseignement de l'Analyse est poussé plus ou moins loin, suivant le but que l'on se propose d'atteindre. Tantôt il s'agit, par l'exposé des travaux

récents, de montrer dans quelles directions d'esprit, suivant quelles routes on peut espérer découvrir des vérités nouvelles ; tantôt on se propose de former de futurs professeurs ; d'autres fois enfin, les notions scientifiques dont il s'agit sont surtout destinées aux applications effectives ; c'est ce dernier cas qui se présente pour les écoles où se recrutent les ingénieurs. Il est clair que dans ces divers cas, et suivant le temps dont on dispose, l'enseignement du haut Calcul doit être plus ou moins étendu, plus ou moins profond, et recevoir une direction différente. Beaucoup de science acquise et beaucoup de discernement sont nécessaires pour atteindre le but.

A cet enseignement scientifique, sous une forme ou sous une autre et quel qu'en soit le degré, on a souvent fait des objections superficielles, pouvant en général se résumer en ceci : A quoi bon toutes ces notions théoriques ? Il ne s'agit pas de former des savants, mais des hommes pratiques, capables de bien s'acquitter des fonctions qu'ils auront à remplir.

D'abord, l'enseignement ne forme jamais des savants; les savants se forment eux-mêmes. Parmi les auditeurs d'un cours quelconque de Mathématique, ceux qui ont le goût instinctif de la science en elle-même, l'amour de la recherche, finiront par trouver leur voie. Tel n'est pas le cas de la grande majorité. Mais, ainsi que j'ai pu le faire remarquer déjà, l'ingénieur qui n'aurait pas été mis en possession des notions scientifiques générales qu'on lui donne comme préparation professionnelle, se trouverait dans un incontestable état d'infériorité. D'un côté, bien des problèmes pourront se présenter à lui dans la pratique d'une façon inopinée ; plus d'une fois, il aura grand avantage à employer des ressources puisées dans l'enseignement scientifique précédemment reçu. En outre, l'esprit mathématique, c'est-à-dire l'habitude du discernement, de la précision, de la

méthode, la distinction de l'abstrait et du concret, de l'absolu et du relatif, donne une aptitude particulière pour étudier les questions que l'ingénieur peut avoir chaque jour à résoudre, alors même que ces questions ne constituent pas des applications directes de la Mathématique.

Il est enfin une dernière considération sur laquelle je peux passer rapidement ici, puisque je serai conduit à y revenir dans l'un des chapitres qui vont suivre. Il serait difficile d'admettre qu'un ingénieur, savant ou non, puisse se passer de notions de Mécanique, puisqu'il aura, tous les jours pour ainsi dire, à faire de la Mécanique appliquée. Or la Mécanique appliquée n'existe pas sans une étude de la Mécanique rationnelle, et la Mécanique rationnelle exige des connaissances assez étendues sur le Calcul infinitésimal et sur le Calcul des fonctions. Cette raison, bien qu'indirecte, suffirait à elle seule pour justifier amplement l'introduction dans l'enseignement préparatoire des notions dont nous avons parlé. On serait bien souvent en droit de regretter au contraire que les nécessités générales imposées par les autres parties de l'enseignement, et aussi le temps restreint dont on dispose, ne permettent pas de donner un plus large développement à ces théories élevées, concernant le Calcul différentiel, le Calcul intégral et le Calcul des fonctions. Dans l'impossibilité où l'on se trouve d'étendre ces programmes, gardons-nous du moins de laisser porter atteinte aux modestes éléments qui y figurent aujourd'hui. Ce serait la marque d'un recul, d'une décadence dont les effets ne tarderaient pas à se faire cruellement sentir dans le domaine de la pratique, et montreraient ainsi, mais trop tard, aux détracteurs de l'enseignement scientifique, combien grande est leur erreur et combien leur thèse paradoxale est contraire au but qu'ils désirent atteindre.

CHAPITRE IV

Enseignement de la Géométrie.

J'ai déjà dit que les premières notions géométriques devaient être données à l'enfant parallèlement aux premières notions d'Algèbre, c'est-à-dire succéder, sans trop de retard, à l'initiation à l'Arithmétique raisonnée. Mais, de même que pour l'Arithmétique il y a une préparation préliminaire, la pratique du calcul, de même il est utile que la Géométrie théorique soit précédée de la pratique du dessin. L'habitude, prise dès l'enfance, de tracer des figures nettes et sensiblement exactes, sera d'un grand secours plus tard lorsque se développeront les divers chapitres de la Géométrie. Celui qui a défini cette science « l'art de raisonner juste sur des figures fausses » s'est singulièrement trompé. On ne raisonne jamais que sur des abstractions, et les figures sont toujours fausses; mais lorsque l'approximation est par trop grossière, lorsque les tracés sont mal exécutés et confus, cette confusion matérielle engendre vite celle du raisonnement, et contribue à empêcher l'apparition de la vérité. Il y a même des circonstances où une figure mal faite permet, par des raisonnements irréprochables, d'arriver à des absurdités manifestes. La première éducation géométrique doit donc être entreprise, comme celle du calcul pratique, chez l'enfant qui apprend à lire et à écrire, et cela sous forme de dessins, de tracés dont profitera

aussi l'enseignement du dessin d'imitation ordinaire. La Chalotais, que nous avons déjà cité, insiste sur ce point avec grande raison dans son *Essai d'éducation nationale*.

On doit profiter de cette pratique du dessin des figures pour donner en même temps à l'enfant la nomenclature, *sans aucune définition*, d'un très grand nombre de faits géométriques. Sans aucune fatigue de mémoire, et à force, en se jouant, de multiplier les tracés, il saura bientôt ce que c'est qu'une droite, un cercle, un système de droites parallèles, un carré, un rectangle, un losange, un trapèze, etc. Ce sera autant de gagné pour l'avenir; et lorsque se présenteront plus tard les définitions rigoureuses, il n'aura pas de peine à les rapprocher de ce qu'il aura vu et exécuté lui-même si souvent.

Rien ne s'oppose même à ce que l'on complète ces notions par quelques autres sur la Géométrie de l'espace. Quand un jeune écolier a acquis assez d'habileté pour dessiner un cube en perspective, pourvu qu'il ait entre les mains le modèle à représenter, il est facile d'attirer son attention sur les particularités que présente cette figure : faces, arêtes, sommets ; on peut faire de même pour un grand nombre d'autres figures, cylindres, cônes, etc., et l'amener même à confectionner ces figures par des découpages et des collages de cartons. A ces leçons de choses, toujours récréatives, n'exigeant jamais rien de la mémoire, l'esprit géométrique se développe, le sens des figures s'acquiert, dans le plan et aussi dans l'espace, et l'on a semé une bonne graine peur l'éducation scientifique qui devra venir plus tard.

J'estime que dans toute cette période l'usage des instruments doit être à peu près complètement proscrit, puisqu'il s'agit de faire ici surtout l'éducation de l'œil et de la main. Seulement, l'emploi du papier quadrillé est non moins utile que pour les opérations de calcul, surtout au début.

Lorsque viendra l'instant de l'étude scientifique de la Géométrie, l'enfant arrivera donc muni d'un petit bagage préparatoire fort précieux, et qui évitera autant de peine et de perte de temps à lui-même qu'au professeur. Il sera capable de reproduire rapidement et nettement, avec une exactitude suffisante, les figures tracées sous ses yeux; il aura une nomenclature assez complète de ces figures.

C'est alors une initiation nouvelle qui commence. Jusqu'à présent, je l'ai fait remarquer plus haut, cette initiation a eu lieu suivant une méthode bien aride, et pourtant le sujet est un de ceux, dans la Mathématique, qui permettent le mieux d'éviter l'aridité. Il faut néanmoins reconnaître que, dans les dernières années, d'importantes tentatives ont été faites pour modifier un peu la forme rigide et même rebutante sous laquelle la Géométrie se présentait jadis, et dont le célèbre livre de Legendre offre le type le plus parfait. Parmi ces tentatives, on peut surtout citer les excellents ouvrages de MM. Rouché et de Comberousse. Il me paraît cependant possible d'aller encore plus loin dans cette voie nouvelle, et d'étudier tout aussi complètement les propriétés des figures, sans recourir à cette découpure en propositions isolées, qui s'adresse à la mémoire plus qu'à l'intelligence, et empêche l'élève de suivre la filière des idées, l'enchaînement qu'elles présentent entre elles. C'est peut-être en Géométrie, plus que dans aucune autre des parties élémentaires de la Mathématique, que la curiosité, l'esprit de recherche peuvent être le plus facilement mis en éveil. La grande question, c'est d'amener l'élève à chercher lui-même, à découvrir les propriétés, à se poser des problèmes; dans ce but, il faut soigneusement éviter la forme dogmatique et pénible de Legendre, et, après avoir nettement insisté sur les idées générales fondamentales, chercher à classer l'étude que l'on poursuit d'après la nature des figures, en commençant par les plus simples.

Donc, les axiomes dont on a besoin doivent être introduits avec une entière franchise; les définitions doivent être soigneusement choisies. C'est ainsi que la célèbre définition de la ligne droite, « le plus court chemin d'un point à un autre », définition d'ailleurs à peu près unanimement abandonnée, représente l'un des plus remarquables exemples de la persistance avec laquelle une absurdité peut se propager pendant des siècles. En premier lieu, l'idée exprimée est incompréhensible pour des commençants, puisqu'elle suppose la notion d'une longueur courbe; en outre, c'est un cercle vicieux, car la longueur d'une courbe ne peut être comprise que comme limite d'une somme de longueurs rectilignes; de plus, cela n'est pas une définition, puisque c'est au contraire une proposition démontrable. Pourquoi ne pas reconnaître franchement que la ligne droite est indéfinissable ? Pourquoi ne pas admettre la propriété dont il s'agit, à titre d'axiome provisoire ? Pourquoi ne pas profiter de la circonstance pour montrer que la ligne droite, de même que toute ligne, toute figure géométrique, n'existe que dans notre esprit ? Tout simplement parce qu'on a voulu trop longtemps réduire la Géométrie à un mécanisme logique, et qu'on s'imaginait la diminuer en lui attribuant une origine expérimentale.

Il y aurait encore bien d'autres critiques à faire, et bien des améliorations à désirer. Dans mon souci d'abréger, je dois me borner à des exemples. Je rappellerai donc simplement ce que j'ai dit sur la Géométrie à une dimension, et en particulier sur la Géométrie de la droite. Il y a là des notions intéressantes à introduire dans l'enseignement dès le début, sauf à les reprendre plus tard après l'étude des mesures et des rapports, de manière à arriver à cette conclusion évidente, que bien peu d'élèves ont remarquée : « Toute identité algébrique entre quantités positives ou négatives est la traduction d'une propriété de points en ligne droite. »

Autre chose. On définit les figures égales : deux triangles égaux, par exemple, sont ceux que l'on peut surperposer. Mais cette superposition peut s'essayer de deux manières : par *glissement* dans le plan, ou par l'obligation supplémentaire de *retourner* l'une des deux figures. Il faudrait donc distinguer l'*égalité directe* et l'*égalité symétrique*. La différence philosophique est capitale, puisqu'on n'arrive à la superposition qu'en sortant de l'espace à deux dimensions que l'on étudie. Elle engendre une conséquence intéressante, car c'est la base même de la symétrie, qu'on doit étudier le plus tôt possible. Et lorsqu'on arrivera à la Géométrie de l'espace, lorsqu'on examinera deux trièdres symétriques, par exemple, est-ce qu'on n'aura pas ainsi l'explication de ce phénomène, bizarre pour les commençants, de figures égales dans toutes leurs parties, mais pas superposables ? L'analogie avec le plan est manifeste. Pour superposer les figures il faudrait faire sortir l'une des figures de l'espace réel où nous sommes et la retourner, ce qui ne se peut. Mais le résultat peut être obtenu par une représentation matérielle, physique, absolument frappante : le retournement à la manière d'un gant ou d'un bonnet de coton.

Et tout cela pourra et devra être repris et complété à propos de la similitude qui peut être, elle aussi, directe ou symétrique. Combien d'autres additions je pourrais indiquer, si je ne sentais que la place m'est mesurée, si je ne me contraignais volontairement à rester dans les idées générales, et à citer seulement des exemples.

Il y aurait aussi des amputations indispensables; je n'en citerai qu'une. Qui pourrait dire les raisons pour lesquelles, dans la plupart des Cours ou des programmes, on a laissé traîner le calcul de π par la méthode des périmètres et par celle des isopérimètres ? Et il y a des élèves qui ont pâli pendant des semaines sur de telles questions; quelques-uns, leurs études terminées, croient encore que c'est comme cela que l'on a

calculé le rapport de la circonférence au diamètre ! Ceux-là sont vraiment excusables s'ils portent sur la science mathémathique des appréciations peu sympathiques, mais plutôt bizarres ; la faute en est à d'autres plus qu'à eux.

Je ne saurais passer en revue les principaux sujets que doit comprendre un enseignement méthodique et raisonné de la Géométrie. Mais il est bon d'insister sur l'utilité d'introduire dans certains éléments, dans tous les éléments mesurables, pourrions-nous dire, la notion du *sens*, ou du signe, aussitôt que ces éléments se présentent pour la première fois. La marche parallèle de l'Algèbre et de la Géométrie rend la chose facile, et en appliquant cette méthode on fait gagner bien du temps, et l'on s'épargne bien des difficultés pour l'avenir.

Pour nous en tenir à la Géométrie plane, les éléments dont il s'agit se réduisent aux segments, aux angles et aux aires. Y a-t-il donc une difficulté notable à remarquer tout de suite qu'il y a lieu de distinguer les segments AB et BA, que les segments sur une droite peuvent être portés dans deux sens opposés ? Ne doit-on pas montrer aussi que les angles peuvent avoir deux sens, parce qu'une rotation peut s'effectuer en deux sens opposés ? Et, profitant de l'occasion, il n'est pas inutile, incidemment, d'indiquer qu'un angle tracé n'est pas un angle défini ; la différence entre un segment et un angle étant à peu près la même, au point de vue des mesures, que celle existant en Arithmétique entre une égalité et une congruence. Et les signes des angles entraînant comme conséquence la considération des signes des aires, on arrive tout naturellement à constater par exemple que les triangles ABC et ACB ont des aires de signes contraires, et que $OBC + OAB + OCA = ABC$, quelle que soit la position du point O sur le plan ; proposition dont la portée est peut-être plus grande au point de vue de l'éducation de l'esprit, que certains

théorèmes ou problèmes incorporés dans l'enseignement par la puissance de l'usage.

J'admire autant que personne la Géométrie des Grecs; mais qui dit progrès dit changement. Et parfois le changement devrait consister à remonter beaucoup plus haut que les Grecs. C'est ainsi que, pour le célèbre théorème dit de Pythagore, et qu'on reprend au moins sous deux formes différentes, sans aucun avertissement, on donne une démonstration géométrique passablement compliquée, très peu naturelle en tout cas, alors qu'il en existe une que l'on doit aux Hindous, qui est non moins rigoureuse, qu'un enfant de dix ans peut facilement comprendre, et qu'il est sûr, l'ayant comprise, de ne jamais oublier.

L'idée générale de transformation doit être franchement introduite dans l'enseignement aussitôt que la chose est possible. Pourquoi, par exemple, ne pas montrer ce qu'est l'homothétie et en déduire la similitude ? Pourquoi ne pas indiquer ce que sont les centres de similitude de deux figures semblables quelconques, en distinguant la similitude directe et la similitude symétrique ? Pourquoi ne pas parler de l'inversion, cette méthode si puissante, si féconde et si simple, même dans des cours tout à fait élémentaires ? Des notions sommaires sur la division harmonique, sur les divisions homographiques, sur l'involution, ne coûteraient pas non plus une grande peine et intéresseraient l'élève. Mais toutes ces questions font partie de ce qu'on est convenu d'appeler la Géométrie moderne ou quelquefois la Géométrie supérieure. Ce n'est pas une raison suffisante à mes yeux pour les bannir de l'enseignement, ni même pour les rejeter en bloc dans un chapitre complémentaire vers la fin des études. Donner de bons outils à l'ouvrier quand la tâche est finie ne me paraît pas être le comble de la logique.

Deux idées importantes méritent d'être constamment

mises en lumière et appliquées; la première l'est en fait par tous les professeurs dignes de ce nom : c'est celle des lieux géométriques. Je n'y reviens donc pas, en ayant suffisamment parlé plus haut. L'autre est celle des constructions. L'élève, à ce degré, a entre les mains une règle et un compas; il importe de lui montrer tout ce qu'on peut arriver à faire à l'aide de ces deux simples instruments; on doit reprendre toutes les expressions algébriques déjà connues, et qui s'y prêtent, pour les traduire en constructions géométriques; on doit demander de chaque problème des constructions effectives, et non pas seulement théoriques. Ce serait ici le moment de placer des notions sommaires, et cependant suffisantes, de Géométrographie; il n'y faudrait pas consacrer beaucoup de temps pour y intéresser de jeunes auditeurs, et on les perfectionnerait sans autre effort dans l'art des constructions géométriques; pour les personnes qui attachent un grand prix à l'émulation, ne serait-il pas intéressant, dans des classes nombreuses, de voir ouvrir des *concours de simplicité* sur un résultat géométrique à obtenir avec la règle et le compas?

Dans une grande partie des considérations précédentes, nous avons supposé, implicitement ou d'une manière expresse, que l'Algèbre et l'Arithmétique étaient enseignées parallèlement à la Géométrie. C'est indispensable et non pas seulement utile, pour conserver à l'ensemble des notions mathématiques ce caractère d'unité et de coordination sans lequel elles arrivent à perdre tout intérêt et toute valeur. Un jeune homme qui aurait appris l'Arithmétique, pour passer ensuite à l'Algèbre, puis à la Géométrie, et qui continuerait de la sorte pendant dix ans, aurait l'esprit moins formé qu'avec trois ou quatre années d'un enseignement parallèle, conduit avec une certaine intelligence.

Ceci m'amène à quelques nouvelles observations sur l'étude des coniques en Géométrie. Dans beaucou

de programmes ou de cours élémentaires, cette étude forme un chapitre spécial et important. On la fait sans le secours de la Géométrie moderne, qui la simplifierait et l'éclairerait, et aussi, bien entendu, sans se servir des méthodes de la Géométrie analytique, que l'élève ne doit pas connaître encore. Toujours parce que les Grecs ne connaissaient ni Descartes ni Chasles, ce dont ils sont excusables.

Est-ce que le bon sens n'indique pas que tout cela doit être mené parallèlement? Des éléments bien simples de Géométrie analytique ayant permis de trouver les principales propriétés des coniques, il est fort utile de rapprocher de ces résultats ceux qu'on peut obtenir rien que par les ressources de la Géométrie. Voilà une étude comparative qui éclaire l'esprit, qui montre par quelles voies différentes l'esprit humain peut accéder à la vérité, qui permet d'établir entre ces chemins divers une comparaison réfléchie et de constater que les uns sont plus sûrs, les autres plus rapides, suivant les questions, et que dans l'ensemble tous sont également bons et dignes de provoquer l'admiration de ceux qui en profitent. En résumé, l'étude géométrique des coniques doit plutôt prendre place dans l'enseignement de la Géométrie analytique que dans celui de la Géométrie.

J'en ai fini avec la Géométrie proprement dite. Parmi les figures importantes qu'elle nous offre, il en est une plus particulièrement intéressante, soit sur le plan, soit sur la sphère, au point de vue des applications, quand on fait usage de l'Algèbre. C'est le triangle. De là est sortie une branche de la science mathématique dont je crois à peine avoir prononcé le nom et qui occupe cependant une place importante dans l'enseignement : c'est la *Trigonométrie*.

C'est qu'en effet la Trigonométrie, telle qu'elle existe, est une science purement artificielle, sans corps,

sans doctrine, et fabriquée uniquement pour les besoins de l'enseignement, et d'un enseignement peu rationnel. Pour qu'on en puisse juger, me bornant à la Trigonométrie *plane*, qu'on appelle partout, on ne sait trop pourquoi, Trigonométrie *rectiligne*, je remarque qu'elle est divisée en trois chapitres : 1° Étude des fonctions circulaires; 2° Construction des tables; 3° Résolution des triangles et applications.

Or les fonctions circulaires tirent leur définition et leur origine de la Géométrie, et sont étudiées en Algèbre; la construction des Tables est une question d'Arithmétique qui s'introduit incidemment au cours de l'Algèbre, comme il arrive dans bien d'autres cas; enfin la résolution des triangles constitue bien évidemment un ensemble de problèmes géométriques, auxquels l'Algèbre vient apporter son secours.

Il n'y a dans tout ceci, ni but spécial, ni doctrine, ni vue philosophique essentielle. Mais il y a la nécessité d'aborder des questions pratiquement indispensables, dont les applications à la Topographie et à la Géodésie sont continuelles. Et comme l'enseignement de l'Algèbre élémentaire est incomplet à un tel point qu'il ne comprend même pas l'étude des fonctions circulaires, comme celui de la Géométrie a consisté pendant des siècles à dicter Euclide et à le recopier, on a bien été forcé de former un amalgame composite sans suite, sans lien, qu'on a décoré d'un nom particulier. Il faut savoir gré à ceux qui découpent ainsi la science en petites tranches de n'avoir pas placé dans la Trigonométrie l'étude des logarithmes, sous prétexte que les logarithmes sont utiles à la confection des Tables; mais d'un autre côté, on a enrichi cette science prétendue d'une théorie qui est l'une des plus importantes de la Mathématique en général : celle des projections. La théorie des projections appartient à la Géométrie, et crée l'un des liens les plus étroits entre cette science et l'Algèbre; on ne l'a placée ni dans l'une ni dans l'autre ;

on l'a reléguée où je viens de le dire; le résultat, c'est qu'on la regarde comme un hors-d'œuvre sans grande importance, que les professeurs l'enseignent quand ils en trouvent le temps, que les élèves se l'assimilent d'une façon douteuse, et qu'après s'être donné beaucoup de mal, ils n'ont généralement pas de vues précises, ni sur l'Algèbre ni sur la Géométrie.

Si, par respect pour les habitudes prises, on tenait absolument à conserver le terme de Trigonométrie, on devrait au moins réduire cette branche à son dernier chapitre, qui seul répond au nom, et remettre les deux autres à leur rang naturel, en donnant à la théorie des projections une place d'honneur en Géométrie. Mais il serait mieux encore de faire de cette Trigonométrie ainsi comprise un chapitre de la Géométrie en général, et d'y incorporer tout ce qui est assez étudié dans la Géométrie du triangle, et d'un intérêt assez général, pour mériter de devenir classique et de passer dans l'enseignement.

Parmi les sciences dont l'enseignement se rattache directement à celui de la Géométrie, il faut placer en première ligne la Géométrie descriptive, que nous avons essayé de caractériser plus haut. C'est une étude qu'il convient de commencer quand on se trouve déjà en possession des éléments de la Géométrie de l'espace, sans lesquels les premiers principes ne présenteraient que confusion et seraient incompréhensibles. Mais il importe aussi de ne pas différer plus longtemps, car la Géométrie descriptive, dans tout son développement, réagit sur la Géométrie elle-même, aide à la mieux comprendre et fournit des ressources pour beaucoup de propositions.

Ce qui est essentiel dans la Géométrie descriptive, c'est de n'oublier jamais qu'elle est par essence une science d'application, et par conséquent d'éclairer l'enseignement par de continuels exercices, bien choisis,

et empruntés plutôt aux exemples matériels qu'aux figures abstraites. Sans l'exécution des épures, faites avec soin, cet enseignement resterait à peu près totalement improductif; c'est ainsi par exemple que dans certains programmes de baccalauréats, où on l'a introduit sans pouvoir l'accompagner des exercices graphiques nécessaires, il n'a produit d'autre résultat que de terroriser les candidats en leur inspirant, pour la vie, l'horreur de la Géométrie descriptive.

On se demande parfois si, pour faire quelques progrès dans cette science, il est nécessaire de « voir dans l'espace », c'est-à-dire de prendre une conscience nette de la forme des corps ou des figures à l'inspection de leurs projections. Assurément; mais cette faculté ne se développe justement que par l'étude de la Géométrie descriptive; en suivant avec soin le développement de ses premiers principes, d'ailleurs simples, en appliquant les méthodes qu'elle fournit et en appelant le raisonnement à son aide, on arrive à faire de bonnes constructions, alors même qu'on ne « voit » pas encore; et à force de répéter ces exercices, on finit par voir; c'est une faculté qui se développe assez vite, même chez les sujets les moins bien doués naturellement à cet égard. On la perfectionne ensuite graduellement par la continuation d'une étude réfléchie et par la prolongation d'épures graphiques d'une difficulté croissante.

Un écueil à éviter quand on enseigne la Géométrie descriptive, c'est de rendre l'élève esclave de ses deux plans de projection et d'une ligne de terre invariablement tracée. Pour que l'on puisse tirer de cette étude tout le parti qu'elle permet dans les applications, il est très important de lui conserver une extrême souplesse; et la méthode du changement de plan vertical doit devenir d'une pratique pour ainsi dire instinctive. Quand ce changement a lieu parallèlement, ou lorsqu'on déplace le plan horizontal parallèlement à lui-même, on arrive à constater même l'inutilité, dans une foule de

questions, de tracer la ligne de terre, laquelle ne constitue plus qu'une superfétation. On ne saurait assez méditer les excellentes observations produites à ce sujet par M. Mannheim, l'une des plus hautes autorités contemporaines sur une question de cette nature.

Ajoutons que dans tout enseignement rationnel, il serait bon, et même indispensable, de faire marcher parallèlement l'étude des représentations par deux projections avec celle des projections cotées. On y gagnerait aussi bien en ce qui touche les applications futures que pour les progrès directs et immédiats qu'on veut atteindre.

Enfin, ici comme partout, il faut conduire l'élève vers les méthodes plutôt que les lui apporter toutes faites. Le désir de trouver et de résoudre est ici doublé du sentiment d'utilité ; car l'esprit le plus vulgaire en saurait reprendre l'éternelle et stupide objection : « A quoi cela peut-il servir? » lorsqu'il s'agit de la Géométrie descriptive.

J'ai dit plus haut pour quelles raisons l'enseignement de la Statique me semblait devoir être incorporé à celui de la Géométrie, dont il formerait un chapitre complémentaire. Il n'est pas très utile d'y revenir, et je me borne à insister sur les précautions extrêmes avec lesquelles la notion abstraite de force doit être ici introduite et définie pour éviter des confusions, des idées fausses dont les effets se feraient sentir plus tard d'une façon désastreuse, lorsqu'on étudiera la Mécanique.

A cette étude de la Statique doit être adjointe, tout en restant distincte, la Géométrie des masses, dont nous avons également parlé. Pour montrer à quel point on peut avoir des dangers à éviter en ces matières, je me bornerai à citer un exemple d'erreur grossière obtenue par une fausse interprétation des questions et des principes.

On place d'habitude en Statique la détermination des

ntres de gravité

asses. Or, en

tum fondamental

ne force le long

oir le centre de

asses m et

uée en A. F

nt AA' et dont

ransportons-les le long

mener en B

era appliquée en B

té sera... on

ement saute aux yeux

xemple excessif

entre de gravité

mps propagé

ne méthode

isme, mais plus

ent était

n reste et fort

ui avait été mal compris

Les développements

e la Géométrie

ts que l'on doit

plus grande difficulté

tre d'en bien fixer les limites.

eulement ici des éléments

itivement acquises

s matériaux, et non pas

ui font encore l'objet

exerce chaque jour

ui cherchent et trouvent

Mais la question étant

ue l'exposé des vérités

onnues et définitivement

lement la durée dont on peut disposer pour un enseignement rationnel, mais probablement la vie d'un homme.

Il s'agit donc d'opérer un triage, et cela d'après les principes suivants : s'attacher aux méthodes qui donneront des propositions en foule, plutôt qu'aux propositions particulières ; retenir de celles-ci quelques exemples types montrant ce que peuvent donner les méthodes, et quelques vérités pouvant entraîner des conséquences utiles pour la suite, ou se prêter à d'importantes applications.

En entrant dans cette voie, on s'éloigne singulièrement de l'ancien plan de la Géométrie classique, mais on donne à cette partie de l'enseignement la vie et l'intérêt dont elle devenait de plus en plus dépourvue.

Enfin, dans le haut enseignement, où se font connaître les progrès actuels de la science, et qui contribue à ces progrès, il y aura place pour tous les aperçus permettant d'ouvrir de nouvelles voies aux auditeurs, qui sont eux-mêmes des chercheurs et quelquefois des savants ; mais c'est toujours en s'attachant plus aux méthodes qu'aux vérités de détail qu'il deviendra possible d'atteindre ce résultat.

CHAPITRE V

Enseignement de la Géométrie analytique

La Géométrie analytique fait partie intégrante de tout enseignement mathématique un peu complet, même d'un enseignement élémentaire, sauf à la restreindre en ce cas à ses premiers chapitres. En employant cette expression « fait partie », je ne m'exprime pas tout à fait bien. C'est « devrait faire partie » qu'il serait mieux de dire. Mais il est entendu que nous indiquons à grands traits les lignes d'un enseignement idéal, facile à mettre en pratique, qui n'a rien de commun avec l'état actuel des choses.

La définition des coordonnées, leur transformation, la théorie de la ligne droite n'exigent que des connaissances simples en Algèbre et en Géométrie. Mais pour tirer de la Géométrie analytique les résultats généraux qu'elle fournit, pour pouvoir mettre en lumière la puissance et la fécondité de cette science, quelques notions de Calcul infinitésimal sont nécessaires. Il est bon, d'après cela, de faire coïncider le début de l'enseignement de la Géométrie analytique avec les premières notions sur les dérivées et de poursuivre parallèlement ces deux études.

En caractérisant plus haut la science dont nous nous occupons ici au point de vue de l'enseignement, j'ai rappelé comment on en avait pendant trop longtemps

méconnu l'esprit. C'est une critique qui ne date pas d'hier. Lacroix, dans ses remarquables *Essais sur l'enseignement* (1828), après avoir indiqué les tentatives de Newton et de ses successeurs pour étudier les courbes du troisième et du quatrième degré, s'exprime en ces termes:

« Persuadés qu'il fallait renoncer à faire une revue générale des courbes, les géomètres sentirent que cette partie aurait atteint toute la perfection dont elle était susceptible, si elle fournissait des méthodes pour déterminer, par l'équation d'une courbe, ses principales propriétés et les diverses circonstances de son cours; et c'est là ce qu'ont fait Euler et Cramer, et ce que le calcul différentiel facilite beaucoup.

« Il semblait donc naturel de revenir sur ses pas, et de rattacher à un même fil toute la théorie des lignes droites ou courbes, classées naturellement par leurs équations; c'est cependant ce qu'on ne fit point. La force de l'habitude engagea encore les géomètres à amalgamer, pour ainsi dire, les méthodes anciennes avec les nouvelles; et cet assemblage informe portait toujours l'empreinte des premiers temps de la science ».

Insistant plus loin sur la nécessité du triage des propositions qui doivent constituer la base de l'enseignement : « Qu'est-il besoin, ajoute-t-il, de se perdre dans une multitude de propositions, dans une variété de méthodes, qui ne font qu'éblouir les commençants, et leur faire passer sur le même résultat un temps qu'ils emploieraient à en apprendre de nouveaux?... tout ce qui n'augmente pas la puissance des méthodes ou qui n'abrège pas la chaîne qui lie les résultats entre eux, ne doit pas entrer dans les éléments ».

Malgré les progrès de la science, ou pour mieux dire à cause des progrès de la science depuis l'époque où Lacroix s'exprimait ainsi, ce sont encore aujourd'hui d'excellentes maximes, des indications générales précieuses dont doivent s'inspirer ceux qui ont à enseigner la Géométrie analytique.

Il y a cependant un double écueil à éviter, on doit le reconnaître très franchement. Par des études trop particulières, on enlève à la science toute sa portée ; mais si le développement des méthodes générales est donné sans certaines précautions, de nouveaux inconvénients se produisent. Un élève ayant en sa possession, d'une façon irréprochable, les méthodes dont nous parlons, et se trouvant en présence d'une question des plus simples, a fréquemment recours à ces instruments puissants, au lieu d'étudier le problème qui lui est soumis et d'y appliquer sa raison. Il développe de longs calculs, invoque des théories plus ou moins élevées pour découvrir un résultat qu'un peu d'attention et de logique lui aurait permis de reconnaître immédiatement. C'est la traditionnelle image de l'homme qui prend une massue pour assommer une mouche. Il importe de bien persuader aux élèves, cependant, que si les méthodes générales sont des instruments précieux, elles ne dispensent pas de raisonner, que la sagacité conserve toujours une valeur considérable; que la Géométrie analytique est une science géométrique; qu'y voir un prétexte à étalages de calculs sans fin est une conception fausse; que la complication de l'appareil algébrique doit être en rapport avec la difficulté de la question de Géométrie correspondante.

Pour montrer tout cela, il ne suffit pas de le dire : il faut le prouver ; on le prouvera par de continuels exercices, rapprochés des méthodes elles-mêmes, et en indiquant bien l'usage. On pourra alors se convaincre que cet usage n'entraîne jamais comme conséquence la non-intervention du raisonnement. Réduire les méthodes de Géométrie analytique à un rôle purement mécanique, c'est en méconnaître l'esprit et la portée. Le calcul automatique venant se substituer à un examen judicieux des questions, ce n'est pas là de la science; cet examen doit invariablement précéder l'application du calcul, ne fût-ce que pour déterminer le choix entre

les divers chemins qu'on peut suivre, et le calcul ne doit venir qu'à son heure, et quand on l'appelle, comme un serviteur fidèle, et non comme un maître impérieux.

J'ai parlé déjà de l'intérêt que présente une comparaison entre les résultats relatifs à la Géométrie du plan et ceux de la Géométrie de l'espace ; c'est surtout à l'enseignement que s'applique cette observation. Si l'on entrait franchement dans cette voie, il ne serait pas étonnant qu'on pût, d'ici quelques années, arriver à présenter à la fois les principales théories du plan et de l'espace, à gagner ainsi un temps précieux et à donner en même temps plus de portée à l'esprit, en lui présentant des analogies qui bien souvent lui échappent.

Dans tout le développement de la Géométrie analytique élémentaire, en dépit de l'importance qu'y doivent prendre les théories générales, il restera toujours une place sérieuse pour l'étude des coniques et des quadriques. Il y a pour cela deux raisons : la première consiste dans les nombreuses applications des propriétés de ces figures ; la seconde, c'est qu'elles offrent les exemples les plus simples et les plus saisissables qu'on puisse invoquer pour mettre en œuvre les méthodes.

Seulement, cette étude, au lieu d'être détaillée, poursuivie jusqu'aux dernières limites, doit rigoureusement se circonscrire, s'appliquer aux propriétés essentielles, laissant les autres dans la pénombre en indiquant seulement les sentiers par lesquels il serait possible de les aller trouver. Dans toute cette partie de la Géométrie analytique, de larges appels devront être faits à la Géométrie moderne, et fourniront l'occasion de montrer incessamment à quel point le calcul et la Géométrie pure sont des forces à associer entre elles au lieu de vouloir les opposer l'une à l'autre.

Il serait essentiel, dans l'étude des coordonnées cartésiennes, de donner plus d'attention qu'on ne le fait d'habitude à la correspondance entre les figures et les

symboles par lesquels on les représente ; j'ai sommairement indiqué plus haut cette question de la représentation analytique des figures et je ne veux pas y revenir davantage, me bornant à en constater l'intérêt au point de vue spécial de l'enseignement.

Le plus généralement, après avoir traité indifférement par les coordonnées obliques ou par les coordonnées rectangulaires, la majorité des questions en Géométrie plane, on se restreint aux coordonnées rectangulaires lorsqu'il s'agit de la Géométrie de l'espace. Une des raisons les plus plausibles pour en agir ainsi, c'est la complexité des calculs; dès qu'il s'agit surtout de propositions où entrent les notions d'angles et de distances, la comparaison n'est certes pas à l'avantage des coordonnées obliques. Cependant, on peut regretter de voir certaines théories se particulariser ainsi d'une façon excessive ; ce serait un réel progrès s'il était possible, par des notations nouvelles convenablement établies, de donner plus de généralité à l'exposition des principales méthodes, les coordonnées rectangulaires n'étant alors qu'un cas particulier, lequel resterait quand même avantageux à employer dans un très grand nombre d'applications. Ce progrès, il est permis d'espérer qu'il se réalisera quelque jour ; mais il est plutôt d'ordre algébrique que d'ordre géométrique, puisqu'il consiste dans une simplification des symboles, permettant d'exprimer les mêmes vérités, de leur faire subir les mêmes transformations avec des écritures plus concises. Cette remarque, dans tous les cas, ne constitue pas une critique, puisque l'outillage nouveau qui serait nécessaire est encore à trouver ; c'est simplement un desideratum portant sur l'enseignement de l'avenir, et qui reste subordonné à des perfectionnements algébriques, possibles à notre avis [1].

---

(1) Au moment où s'imprime ce volume, M. le Commandant Ripert publie une brochure : *La Dualité et l'Homographie dans le Triangle et le Tétraèdre*.

Dans les cours de Géométrie analytique, on étudie surtout, et c'est avec raison, les coordonnées cartésiennes ; on consacre aussi un certain nombre de leçons aux coordonnées polaires, en développant même dans ce système plusieurs théories générales. Mais on se borne généralement là, et c'est tout au plus si l'on a donné très rapidement au début quelque indication sur ce que sont les coordonnées en général.

Il serait bon, je le crois, d'étendre un peu ces notions, d'indiquer un certain nombre des systèmes de coordonnées qui ont été proposés, avec quelques exemples montrant ce que deviennent des équations de courbes particulières dans ces systèmes. Mais en outre, les coordonnées trilinéaires, qui d'ailleurs figurent dans plusieurs ouvrages classiques, mériteraient d'être enseignées d'une façon plus régulière et plus générale. Il est bien entendu que nous entendons ici parler des coordonnées tangentielles aussi bien que des coordonnées ponctuelles. Cette introduction des coordonnées trilinéaires offre en effet plusieurs avantages : elle est tout d'abord intéressante en raison de ses très nombreuses applications ; en outre, elle établit un rapport plus direct en bien des circonstances, entre les faits géométriques et les symboles destinés à les traduire ; enfin, on y trouve un exemple, donnant de l'homogénéité des coordonnées une explication visible. Lorsqu'au contraire on se borne à définir les coordonnées homogènes en remplaçant x, y par $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, pour faire ensuite $t = 1$, il semble aux commençants que c'est là un pur artifice algébrique, qui n'a pas de raison d'être géométrique, et qui se trouve, comme par une sorte de hasard, conduire à des résultats utiles. Notons encore

---

qui sera annexée en supplément à l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. Il prépare en outre un volume : *Eléments comparés de Géométrie analytique*, pour lequel il m'a fait l'honneur de me demander une préface. Ces travaux répondent au vœu exprimé ici et plus haut (p. 112).

que les coordonnées trilinéaires, pouvant prendre autant de caractères qu'on voudra, parmi lesquels les coordonnées barycentriques et les coordonnées normales sont les plus simples et les plus employées, fournissent l'occasion de montrer toute l'extension dont l'idée fondamentale est susceptible, même quand on ne l'envisage pas dans sa plus grande généralité.

Il va de soi que tout ce que nous venons de dire sur les coordonnées trilinéaires doit s'étendre pour l'espace à celles qu'on définit au moyen d'un tétraèdre de référence, puisque c'est au fond la même idée fondamentale qu'il s'agit de mettre en lumière.

Dans toute cette partie élémentaire de l'enseignement de la Géométrie analytique, les deux problèmes essentiels sont toujours les suivants : « Connaissant une figure, déterminer son équation ; connaissant l'équation, déterminer la figure, et acquérir le plus de renseignements qu'on le pourra sur ses diverses propriétés ». C'est surtout le dernier qui se présente le plus souvent, et c'est seulement par des exercices répétés qu'on parvient à le résoudre. Malheureusement ces exercices ne sauraient, pour les figures de l'espace, se traduire effectivement par des tracés ; on pourrait bien, dans quelques cas particuliers, construire, par génératrices rectilignes ou autrement, des modèles de surfaces ; mais ce serait une perte de temps considérable. Au contraire, les constructions de courbes planes constituent des exercices rapides et très fructueux pour l'esprit. On peut faire ces constructions dans les divers systèmes de coordonnées dont nous avons parlé ; mais c'est principalement en coordonnées rectilignes (et même rectangulaires) et aussi en coordonnées polaires qu'il convient de les multiplier. Ces exercices étaient jadis en grande faveur ; on semble les avoir un peu abandonnés, ce qui est une chose fâcheuse ; il est probable que la surcharge des programmes sur d'autres points a contribué à cet abandon.

On est en effet, dans cette question de la construction des courbes, pris entre deux difficultés : si l'on se contente de tracés par à peu près, de figures sans aucun souci d'échelle, on n'y apprend pas grand'chose, et l'on s'expose même quelquefois à des erreurs capitales ; si l'on cherche au contraire à obtenir des dessins exacts, en se servant de la règle et du compas, si l'on trace de véritables épures, c'est une consommation de temps exagérée.

Il y aurait un moyen pratique, et fort simple, de concilier tout cela. Il suffirait d'avoir un papier quadrillé spécial, à très petits carreaux, destiné à la construction des courbes ; cela permettrait de faire à main levée des croquis d'une exactitude largement suffisante. De même, pour les coordonnées polaires, des feuilles sur lesquelles seraient tracées d'avance de nombreuses circonférences concentriques, également espacées, et des droites régulièrement rayonnantes autour du centre, fourniraient le moyen d'obtenir un résultat analogue.

De pareils albums de courbes, en les limitant aux courbes les plus importantes et remarquables, seraient pour les élèves qui les auraient confectionnés de précieux auxiliaires. Sur chaque feuille on pourrait rappeler l'équation de la courbe, quelques formules remarquables s'y rapportant, les plus importantes de ses propriétés. Ce recueil aiderait la mémoire ; et les tracés, j'y insiste, auraient été effectués dans ces conditions avec une dépense de temps bien minime.

J'ai essayé plus haut de faire ressortir l'importance philosophique du calcul géométrique en général. En matière d'enseignement, cette importance est capitale ; et cependant combien d'élèves, parmi les plus distingués, ignorent même jusqu'au nom de « calcul géométrique » ! A cette lacune systématique on ne saurait trouver d'autre explication que l'incurable paresse de l'esprit humain, laquelle le porte à ne pas vouloir chan-

ger ses habitudes jusqu'au jour où les progrès accomplis viennent le forcer à l'emploi de méthodes nouvelles.

C'est en Géométrie analytique plane surtout que cette résistance à l'introduction du calcul géométrique devient incompréhensible. Là, pas de symboles nouveaux, pas de règles spéciales de calcul ; la méthode des équipollences amène à l'emploi des opérations courantes qui se font sur les imaginaires. Les notions sur ce qu'on appelle si improprement l'interprétation géométrique des imaginaires sont données (mal données en général, il est vrai) au cours de l'Algèbre ; et aussitôt que de ces opérations, de ces connaissances élémentaires, il s'offre une occasion de tirer des résultats utiles, on s'arrête, on s'y refuse, on persiste avec une sorte de fureur à piétiner dans la vieille ornière.

L'application des équipollences, cependant, donne à l'étude de certaines questions une simplicité pour ainsi dire intuitive ; en même temps qu'elle épargne le calcul, elle éclaire les faits. Elle dispense de l'emploi des coordonnées, mais permet cependant de revenir à tout instant à cet emploi, si l'on y reconnaît un avantage. La transformation des coordonnées, notamment, devient avec les équipollences un problème pour ainsi dire enfantin ; il faut trois ou quatre lignes d'écriture et dix minutes d'attention pour un sujet auquel on consacrait parfois deux leçons, et qui, pour les commençants, n'était pas toujours facile. C'est enfin par les équipollences qu'on peut arriver à avoir des vues précises sur la représentation analytique des figures. En dépit de tant d'avantages, la belle méthode de Géométrie analytique créée par Bellavitis reste à peu près inutilisée, ou plutôt ne s'introduit que par fragments, d'une façon détournée, sans suite, sans lien, sans l'unité qui la caractérise et contribue à lui donner sa haute utilité.

Il est vrai de dire que jamais le progrès ne s'accom-

plit dans le monde d'une façon régulière et normale, ni conformément aux règles de la raison.

En ce qui regarde la Géométrie analytique de l'espace, le calcul géométrique représenté par la méthode des quaternions présente dans son introduction de plus grandes difficultés, en raison de l'Algèbre spéciale qu'elle applique. Quelques éléments sommaires seraient cependant faciles à enseigner, et on en retirerait un grand profit. Il faut reconnaître néanmoins qu'un mot emprunté à cette méthode, celui de « vecteur », a fini par pénétrer dans l'enseignement après bien des efforts; malheureusement, si l'on excepte un petit nombre de professeurs, le mot n'a pas été accompagné de l'idée, ce qui serait mieux encore ; on peut espérer que ce sera l'œuvre de l'avenir.

Enfin, d'une façon plus générale, la méthode de Grassmann, mise sous une forme accessible et réduite à des limites raisonnables, devrait aussi être enseignée dans tous les cours de Géométrie analytique. Rien que la connaissance de ses principes essentiels suffirait à lever bien des difficultés, à éclairer bien des sujets, à éviter bien des calculs inutiles.

Nous ne sommes pas encore arrivés à l'heure où le calcul géométrique, sous aucune de ses formes, pourra être accepté dans l'enseignement, sans réticences et avec gratitude pour les bienfaits qu'il apporte. On le regarde d'un mauvais œil. On serait tenté de se demander si l'on ne tient pas rigueur à ce malappris de sa simplicité même ; il n'est pas mis avec recherche, dit les choses comme elles sont, n'a pas le souci de la mode. Il pourrait arriver, s'il prenait trop d'importance, à réduire à soixante pages des œuvres qui en contiennent mille, sans leur enlever rien d'essentiel. Cela peut expliquer certaines résistances et certaines terreurs ; on pourrait ajouter « certaines colères », bien que cela paraisse invraisemblable à propos d'un pareil

sujet, et l'on ne sortirait pas de la vérité. La seule introduction du mot « vecteur » dans la langue scientifique classique a déterminé de véritables crises, chez des esprits d'ailleurs très distingués. On doit bien se rendre compte d'une chose : c'est que la préciosité, la recherche de l'élégance dans la forme sans trop se soucier du fond, ne sont pas des qualités (?) exclusivement littéraires, à l'époque où nous sommes ; les savants n'en sont pas tous exempts, et les académies n'anéantissent pas ces vertus (que l'on a le droit de tenir pour des défauts). On a même quelquefois soutenu qu'elles tendraient au contraire à les développer.

Mais le jour où le Calcul géométrique s'imposera dans l'enseignement aussi bien que dans la science, est peut-être plus proche qu'on ne croit. Quand auront disparu certaines générations, disparaîtront du même coup certaines résistances. La science a ses nécessités, auxquelles il faut bien finir par obéir ; et grâce à la nécessité, il arrivera un instant où l'on ne pourra plus continuer, par dilettantisme, à compliquer les idées simples, à faire des calculs pour le plaisir d'en faire, et à refuser le secours des diverses méthodes que nous venons d'énumérer. Ce sera un jour de deuil peut-être pour les admirateurs de l'archéologie scientifique, mais de ce jour pourront dater de grands progrès intellectuels.

L'enseignement de la Géométrie analytique doit être complété, nous l'avons indiqué précédemment, par celui de la Cinématique. En réalité, lorsqu'on étudie une courbe en exprimant les coordonnées de chacun de ses points en fonctions d'un paramètre, il suffit de supposer que ce paramètre représente le temps pour avoir les équations du mouvement d'un point dont la courbe en question devient alors la trajectoire. Il est vrai que quand on se place à ce nouveau point de vue, un certain nombre de notions s'introduisent, comme les vitesses, les accélérations des divers ordres, les

vitesses aréolaires, par exemple, et que ces notions n'appartiennent pas directement à la Géométrie analytique. Mais les moyens à mettre en œuvre sont tellement empruntés à cette dernière, qu'il n'y a pas d'hésitation possible. Il est d'ailleurs digne de remarque que cette étude particulière de la Cinématique réagit, ainsi qu'on pouvait s'y attendre, sur un grand nombre de questions appartenant à la Géométrie elle-même, en les éclairant d'une lumière nouvelle.

Il convient de diviser l'enseignement de la Cinématique, comme celui de la Géométrie analytique, en deux parties essentielles : Cinématique plane, Cinématique de l'espace, ce qui n'empêche d'ailleurs pas de faire ressortir les analogies, en profitant de tous les résultats obtenus pour des questions simples, de manière à les étendre, lorsque cela se peut, à des questions plus complexes. La différence entre le plan et l'espace est ici plus profonde qu'en Géométrie, et cela tient à la nature même des choses. Le mouvement des figures planes dans le plan qui les contient se réduit, d'après le célèbre théorème de Chasles, l'un des plus simples et des plus beaux de la Géométrie, à de simples rotations infinitésimales, et conduit à la théorie si féconde du *centre instantané de rotation*. Ces notions peuvent aussi s'étendre aux figures mobiles à la surface d'une sphère. Dans l'espace, au contraire, le mouvement élémentaire d'un solide invariable est complexe ; il correspond à celui d'une vis, c'est-à-dire à un glissement le long d'un axe et à une rotation simultanée autour de cet axe. Cet *axe instantané de rotation et de glissement*, se substituant au centre instantané de tout à l'heure, suffit à faire deviner combien les difficultés seront plus grandes, combien les calculs seront plus compliqués, lorsqu'on passera du plan à l'espace.

J'ai à peine besoin de faire remarquer que les avantages du Calcul géométrique indiqués tout à l'heure seront peut-être plus grands encore dans toute cette

étude de la Cinématique que dans le domaine de la simple Géométrie analytique.

Nous ne parlons que pour mémoire, en terminant, des théories élevées de la Géométrie analytique ou de la Cinématique. Si considérables qu'aient été les progrès de ces deux sciences, il reste encore un champ indéfini ouvert aux savants et aux chercheurs. La théorie des courbes, celle des surfaces, la science des mouvements dans l'espace, laissent encore bien des points qui ne sont pas encore élucidés, bien des problèmes sans solution ou avec des solutions incomplètes. Les aperçus qui peuvent provoquer des découvertes nouvelles appartiennent, ici comme dans toutes les autres branches, à cet enseignement exceptionnel, qui échappe à toute règle par l'élévation même de son niveau, ou plutôt qui ne connaît d'autres règles que celles résultant du talent des professeurs.

CHAPITRE VI

Enseignement de la Mécanique.

On a longtemps caressé le rêve, qui ne semble encore pas abandonné à l'heure actuelle, de constituer un enseignement élémentaire de la Mécanique ; j'entends par là un enseignement donné à des élèves n'ayant aucune notion de Calcul infinitésimal, ne sachant pas ce que c'est qu'une dérivée, possédant seulement les éléments de Géométrie, quelques notions de calcul algébrique et la connaissance des équations des deux premiers degrés. Il existe un grand nombre de programmes où se trouve ainsi indiqué l'enseignement de la Mécanique ; l'usage s'est même établi d'opposer les deux expressions « Mécanique élémentaire » et « Mécanique rationnelle ». A les prendre dans le sens littéral, rien ne serait plus justifié qu'une telle opposition ; il semblerait en résulter en effet que l'enseignement de la Mécanique élémentaire est irrationnel, c'est-à-dire peu conforme à la raison.

L'idée de donner un enseignement de la Mécanique sans les instruments de calcul indispensables est une pure chimère ; on peut mettre tout ce qu'on voudra dans des programmes quelconques ; on peut par des prodiges de talent et d'habileté s'efforcer à présenter à des élèves des notions qu'ils ne peuvent comprendre, en escamotant les difficultés, mais on ne saurait triom-

pher d'une impossibilité radicale absolue, et enseigner une science qui met en œuvre à tout instant les raisonnements du Calcul infinitésimal, sans que les auditeurs aient au moins quelques premières notions de ce calcul. Sinon, on n'obtient qu'un résultat : semer des idées fausses, jeter le doute et le découragement chez les élèves qui raisonnent, donner aux autres l'illusion qu'ils savent quelque chose, alors qu'ils n'ont rien compris. C'est assez régulièrement le produit de l'enseignement fantôme dont il s'agit. On reste confondu quand on voit par exemple figurer dans des programmes de baccalauréat, sous le nom de Mécanique : 1° des éléments de Statique ; 2° des études sur les machines simples ; 3° des éléments de Cinématique et de Dynamique; 4° des notions sur le travail des forces.

S'il s'agissait, non pas d'un enseignement suivi, mais de certains aperçus généraux destinés soit à des gens du monde, soit à ces personnes dont la profession confine aux applications de la Mécanique, il en irait autrement. Quelques conférences, bien faites, par des professeurs ayant une connaissance profonde du sujet, pourraient alors être très utiles et laisser dans l'esprit des traces effectives et des idées justes ; c'est qu'alors on suppose connues les notions dont on a besoin ; on cherche à faire comprendre les choses dans leur ensemble, non pas à les démontrer avec une rigueur scientifique. Mais l'incorporation dans un enseignement sérieux et suivi est difficile à expliquer.

On finit pourtant par en trouver les motifs dans deux pensées contradictoires, dont l'une est juste, et l'autre erronée : 1° La Mécanique, au point de vue des applications, est tellement importante qu'il faut tâcher d'en donner au moins quelques notions à tous les jeunes gens d'une instruction moyenne ; 2° Comme à ces élèves nous ne pouvons pas faire connaître les éléments du Calcul infinitésimal, arrangeons-nous pour nous en passer.

La première proposition est d'une vérité incontestable ; la seconde renferme une erreur capitale. Sans ces premières données sur le Calcul infinitésimal en effet, il n'y a pas de culture mathématique, il n'y a pas d'enseignement, il n'y a pas de perfectionnement de l'intelligence, et surtout de possibilité d'applications ; il reste un fatras de propositions surchargeant la mémoire, une grande fatigue de l'esprit et une forte rancune contre des études si peu attrayantes.

Je me suis un peu étendu sur ce point parce qu'il est à mon avis d'une importance capitale, et parce qu'il faut dissiper nettement une illusion. Ceux qui n'ont pas poussé assez avant leurs études mathématiques *ne peuvent pas* acquérir des notions de Mécanique.

Ils auront peut-être, par la pratique, des connaissances utiles sur les machines ou le jeu des forces ; ils seront capables, par intelligence naturelle et par une sorte d'intuition, de donner de très bons avis sur une question déterminée ; mais cela n'a rien de commun avec une instruction scientifique, raisonnée, qui exige l'intervention des moyens de calcul indispensables.

Laissant donc de côté tout cet enseignement inutile et nuisible, qui n'a rien de commun avec la science, et dont il faut espérer qu'on ne tardera pas trop à se débarrasser définitivement, je suppose un élève en possession des éléments d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie, ayant quelques premières notions de Calcul infinitésimal et une connaissance suffisante de la Géométrie analytique. Comme complément de la Géométrie, il a reçu un enseignement portant sur la Statique et la Géométrie des masses ; comme complément de la Géométrie analytique, il s'est au moins initié à la Cinématique, s'il n'en a pas poussé jusqu'au bout l'étude classique.

Dans ces conditions, et seulement dans ces conditions, il est apte à entreprendre l'étude de la Mécanique rationnelle, ou si l'on veut de la Dynamique. Le professeur

chargé de distribuer cet enseignement n'aura pas une tâche très facile à remplir, malgré cette préparation antérieure. On est encore dans la science pure, mais aux confins des sciences naturelles; les entités sur lesquelles on va avoir à opérer sont par nature complètement nouvelles ; les principes sur lesquels on s'appuiera sont le résultat de l'observation, mais d'une manière indirecte; et il faut cependant qu'il ne reste aucun doute dans les esprits; il faut que ces principes s'y accrochent avec autant de solidité que le feraient de purs axiomes de Géométrie. De là, pour le professeur, l'obligation de consacrer, dès le début, un soin extrême aux idées générales, aux définitions, à l'exposé des principes fondamentaux. Pour que cet enseignement d'une science pure soit vivant et fécond, il est besoin de recourir à tout instant à la science appliquée, de montrer par des exemples tangibles empruntés au monde réel comment s'établit le lien entre la théorie pure et la pratique effective. Et il en sera ainsi pendant tout le développement de la Mécanique rationnelle; réduite à son rôle purement philosophique, elle ne pourrait guère apparaître que sous la forme d'un exercice de l'intelligence, combinant les vérités de la Géométrie et du Calcul pour résoudre des problèmes qui concernent des abstractions n'existant pas réellement. Se jetant au contraire du côté des applications en faisant trop pencher la balance, elle perdrait son caractère de science pure, à laquelle est due sa grande puissance.

On voit combien la question est délicate, combien la mesure précise est difficile à garder pour intéresser toujours l'auditeur, lui laisser entrevoir, lui prouver même l'utilité pratique de la science, sans permettre jamais à une idée fausse de pénétrer dans son esprit, sans lui laisser cette impression pénible qu'on ne lui a donné que des raisonnements par à peu près. C'est par une préoccupation constante des origines intellectuelles de la Mécanique qu'on arrivera à sortir de ce labyrinthe et

à mettre un ordre parfait dans cet apparent chaos. Il ne faudra pas craindre de répéter à satiété, à propos de chaque exemple invoqué, que l'être de raison et l'être réel ne sont en rien assimilables; mais que le premier ne résultant que d'abstractions opérées sur le second, d'hypothèses faites une fois pour toutes, si ces hypothèses sont presque réalisées, le résultat fourni par la Mécanique rationnelle sera presque exact; et l'on profitera de l'occasion pour rappeler que ce mot « presque » renferme l'expression de la perfection mathématique en matière d'application au monde réel, parce qu'aucune grandeur du monde réel ne nous est connue d'une façon absolue.

C'est à ce prix, et avec beaucoup de patience et de suite, qu'on arrivera à pouvoir développer l'enseignement de la Mécanique rationnelle d'une façon logique et harmonieuse, tout en faisant dans le domaine de la Mécanique appliquée de très fréquentes incursions, qui sont indispensables.

Le développement de cet enseignement peut avoir une étendue assez variable. Il comprendra successivement, suivant l'ordre logique qui consiste à passer successivement des questions simples à celles d'une plus grande complexité, la dynamique du point matériel d'abord, puis celle des systèmes libres, et enfin des systèmes à liaisons. Les mouvements de rotation des solides invariables, soit autour d'un axe, soit autour d'un point fixe, doivent prendre une place importante; nous citerons enfin les problèmes d'équilibre déjà mentionnés plus haut, tels que l'équilibre des cordons par exemple, l'étude des percussions et des chocs, des notions d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique.

Mais dans chacune de ces parties, et dans plusieurs autres que nous passons volontairement sous silence, le champ des développements peut être très restreint ou s'étendre pour ainsi dire à l'infini, alors même qu'on

reste rigoureusement dans les limites de la Mécanique rationnelle, et cela se produira d'une façon bien plus complète encore du moment où l'on abordera les applications. Rien que pour les machines, par exemple, il serait possible d'étendre son enseignement sur de nombreuses années, et l'on n'aurait pas encore épuisé le sujet.

Il est certain que si l'on se bornait exclusivement aux principes et à des méthodes générales, il ne faudrait pas un grand nombre de leçons pour présenter l'ensemble de la science du mouvement. Seulement, un tel enseignement serait à la fois inutile et dénué d'intérêt. Si la Mécanique met en œuvre les plus belles théories du Calcul infinitésimal et de la Géométrie, c'est surtout dans les exemples particuliers qu'on aperçoit les heureux résultats de cette intervention ; les théories tout à fait générales ne pourraient donc constituer qu'un enseignement sans vie, et qui ne donnerait même pas à l'esprit les satisfactions intellectuelles qu'on attend de la science pure. Il faut ajouter que, d'instinct, on sent très bien l'impossibilité de concevoir la Mécanique indépendamment des applications en vue desquelles elle a été constituée ; et cela entraîne la nécessité de s'orienter vers ces applications futures par des exercices, des cas particuliers permettant de montrer le parti qu'on peut tirer de chacune des théories successivement exposées.

D'autre part, la multiplication trop grande des exemples particuliers empêcherait de suivre le développement normal de la Dynamique et amènerait à des idées fausses sur le caractère de la science du mouvement. Il y a donc une mesure à garder, et l'on ne peut essayer de la préciser une fois pour toutes, à l'avance, d'une façon invariable. Il faut se rendre compte du temps total dont on dispose, de la nature de l'auditoire et par conséquent du but à poursuivre. Il est bien clair, par exemple, que les notions de Mécanique données à

de futurs professeurs ne sauraient être présentées dans le même esprit que s'il s'agit de jeunes gens appelés à bref délai, comme ingénieurs, à appliquer pratiquement l'enseignement qu'ils reçoivent. Toutes ces considérations, je le répète, et je crois l'avoir prouvé, montrent que la tâche d'un professeur de Mécanique est l'une des plus délicates qui se puissent présenter dans tout l'enseignement de la Mathématique ; plus qu'aucun autre, il doit être conduit, en dépit de son expérience antérieure, à de perpétuels perfectionnements, à des simplifications, des additions ou des retranchements, sans parler des changements que les progrès de la science lui imposent.

Il me semble bon de signaler au passage le grand intérêt que présente en Mécanique l'étude de certaines questions paradoxales. Lorsqu'on s'y trouve conduit, on doit bien se garder de les éviter ; il faut au contraire aller très franchement au-devant d'elles, et profiter de l'occasion pour les analyser, pour remonter aux causes et montrer à quelles interprétations concrètes se prêtent de pareils résultats. En principe, on ne doit pas s'étonner qu'ils puissent se produire, si l'on se reporte toujours aux origines mêmes de la science du mouvement; une fois créées les abstractions, une fois qu'elles sont livrées au calcul, ce dernier s'en empare sans que les équations puissent faire entrer en ligne les données primitives; il ne s'agit plus que d'un problème de Mathématique pure, dont la solution ne s'adaptera pas nécessairement au problème correspondant que présenterait la nature. Dans cet ordre d'idées qui me paraît être d'une importance spéciale, on peut notamment signaler les questions dans lesquelles viennent s'introduire des vitesses infinies. M. Léauté, dans son cours de l'École polytechnique, en donne un exemple, dans le cas du mouvement d'un point attiré par un centre fixe suivant la loi de Newton, la vitesse initiale passant par ce centre,

et il produit à ce propos des réflexions profondément justes, et que je demande au lecteur la permission de rappeler ici, au moins par extraits. Elles éclairent en effet d'une façon frappante le problème des cas limites en Mécanique rationnelle :

« Lorsque le mobile se dirige vers l'origine, il y arrive avec une vitesse infinie. A partir de cet instant, on ne peut plus rien dire sur le mouvement; non seulement parce que les formules ne sont plus applicables, mais parce que le mouvement subséquent est en réalité indéterminé. Le cas de la vitesse infinie est en effet un cas limite, et pour savoir ce qui se passe au moment où les formules ne donnent plus rien, il faut savoir comment l'on est arrivé à la limite.

« Le problème du mouvement d'un point M, lancé suivant MO, et attiré par l'origine fixe O, en raison inverse du carré de la distance, peut être considéré comme cas limite des deux problèmes suivants : 1° La loi d'attraction restant la même, la vitesse initiale est dirigée en dehors de MO et tend ensuite vers MO; 2° La vitesse initiale étant dirigée suivant MO, il y a deux centres d'attraction O' et O'', symétriques par rapport à MO, et qui tendent ensuite à se confondre avec O.

« Dans le premier problème, la trajectoire est une ellipse ayant O pour foyer; quand la direction de la vitesse initiale vient se confondre avec MO, cette ellipse s'aplatit indéfiniment; le mouvement est donc oscillatoire d'un même côté de O, c'est-à-dire que le mobile arrivé en O rebrousse chemin.

« Dans le second problème, le mouvement est rectiligne et oscillatoire de part et d'autre de O; à la limite, le mobile arrivé en O dépassera ce point.

« Chaque fois qu'on rencontre une vitesse infinie dans un problème, il peut être considéré comme le cas limite d'autres problèmes où ne se rencontreraient que des vitesses finies; et pour savoir ce qui se passe après l'instant où la vitesse infinie a été produite, il faut tenir

compte des circonstances suivant lesquelles le cas limite a été atteint ».

Toutes les réflexions précédentes portent exclusivement sur l'enseignement de la Mécanique rationnelle, avec les emprunts indispensables à la Mécanique appliquée. Mais il existe en outre un grand nombre de cas où un enseignement complémentaire, ayant pour objet direct une catégorie particulière d'applications, doit être donné spécialement. La seule énumération des cours qui sont faits ou peuvent être faits ainsi dans les diverses écoles serait bien longue; citons seulement à titre d'exemples : les Machines, dont l'étude peut encore se subdiviser, d'après la nature des forces au moyen desquelles on se propose de produire du travail; la Résistance des matériaux, l'Hydraulique, les Voûtes, les Murs de soutènement, etc., sans parler des branches dans lesquelles les emprunts à la Physique viennent se combiner dans une plus forte proportion avec ceux que l'on fait à la Mécanique rationnelle.

Bien qu'aucun de ces enseignements particuliers ne rentre directement dans notre cadre, l'importance du sujet ne permet guère de passer complètement sous silence quelques observations très générales sur les principes qui doivent présider à l'enseignement de la Mécanique industrielle, c'est-à-dire de la théorie des Machines. Nous le ferons sommairement.

Si, pour donner cet enseignement, on se lançait successivement dans la description particulière de chacune des machines à étudier, on y perdrait un temps énorme, et l'on n'obtiendrait que de minces résultats. Tout d'abord, on resterait toujours incomplet, car chaque jour l'imagination des inventeurs produit par centaines de nouveaux engins mécaniques ; et puis, ce qui est plus grave, on ne fournirait aucune ressource pour étudier et résoudre les questions qui se présenteront dans l'avenir, et qui portent plus souvent sur des ma-

chines à construire que sur des machines existantes. Il est donc essentiel de limiter la partie descriptive et l'étude détaillée du fonctionnement à un assez petit nombre de types.

Il est au contraire absolument nécessaire de grouper méthodiquement les idées générales qui se retrouveront uniformément dans toutes les applications, et qu'il nous faut rappeler à grands traits. Une machine, nous l'avons vu, est un transformateur de travail; mais le travail ne nous apparaissant pas toujours sous sa forme mécanique tangible, on a été conduit à la notion plus générale d'énergie. La théorie de l'énergie, déjà ébauchée en Mécanique rationnelle, et se complétant s'il le faut par des notions empruntées à la Physique, doit donc être le frontispice obligé d'une exposition de la théorie des Machines. Toute l'étude de la transmission du travail mérite d'être faite à ce point de vue avec un soin extrême. Accessoirement, les divers procédés permettant la mesure du travail doivent être nécessairement mis en lumière, et discutés en s'inspirant, non plus seulement des résultats théoriques, mais aussi de ceux qui sont fournis par la pratique et l'expérience. Il en est de même pour les appareils destinés, soit à rendre les mouvements plus uniformes, comme les régulateurs, soit à accumuler la force vive, comme les volants, soit à la consommer en cas d'excès, comme les freins.

Entre les systèmes de la Mécanique rationnelle se rapprochant le plus des machines, et les machines réelles, il y a des différences profondes. Une machine est en apparence beaucoup plus simple qu'un système matériel quelconque, en ce que la plupart des mouvements se trouvent être d'une nature extrêmement élémentaire; nous ne voyons en effet guère autre chose, le plus souvent, que des mouvements de rotation autour d'axes fixes, et des mouvements rectilignes. Les obligations pratiques de la construction font qu'on ne sort guère de là.

Mais d'un autre côté, les forces que l'on peut supposer constantes dans beaucoup de considérations de Mécanique rationnelle sont en fait essentiellement variables, et, la plupart du temps, suivent des lois que l'expérience seule permet de déterminer. De là un abîme profond entre la science pure et l'application, entre la machine idéale que nous avons pu concevoir afin de la soumettre à la Mécanique rationnelle, et la machine effective dont la première n'est que l'image simplifiée. Rien n'est plus facile par exemple, en théorie, que d'imaginer un mouvement uniforme ; rien n'est plus absolument impossible à obtenir effectivement dans la pratique.

Il se produit à peu près ici le même fait qu'en Géométrie pour la ligne droite. Et ce qu'il faut retenir surtout, c'est qu'il ne s'agit plus de simples théories plus ou moins vagues, d'une portée exclusivement philosophique et constituant des jeux de l'esprit ; les conséquences pratiques, effectives, des deux conceptions sont radicalement contraires, c'est-à-dire utiles ou nuisibles. Je n'en voudrais d'autre exemple que l'histoire des perfectionnements des instruments de régulation ; pendant de longues années, on a poursuivi le rêve de régulateurs isochrones, tendant à obtenir l'uniformité absolue des mouvements ; et l'on a fini par reconnaître, malgré toute l'ingéniosité dépensée dans ces recherches, que le problème des régulateurs de vitesse devait être envisagé de tout autre manière. Un régulateur parfaitement isochrone, en effet, est un instrument instable par essence, qui communique à la machine sa propre instabilité, et produit les oscillations à longues périodes, inadmissibles dans la pratique. On s'est appliqué alors à obtenir l'isochronisme approprié, c'est-à-dire à donner à la machine l'instrument le plus propre à assurer son état de régime, en tenant compte de ses conditions de marche, de l'énergie de son volant, etc. Là, comme il arrive fréquemment, le mieux était l'ennemi du bien ; ou pour mieux dire, la perfection mathé-

matique se traduisait par un résultat effectif mauvais. Nous vérifions sur ce cas particulier qu'une bonne solution approximative est de beaucoup supérieure à l'exactitude absolue ; c'est sur cette vérité, qui cesserait d'en être une en Mathématique pure, que repose en grande partie la théorie des machines ; on ne doit cesser de s'en inspirer dans une exposition systématique de cette partie si importante de la Mécanique appliquée.

Bien que la Cinématique, ainsi que je l'ai fait remarquer à plusieurs reprises, soit par son essence même une branche de la Géométrie analytique, les applications effectives de cette partie de la science doivent être rattachées à l'enseignement de la Mécanique appliquée. La description et le fonctionnement des machines, en effet, reposent sur la connaissance des organes, de leur agencement et de leurs mouvements. L'étude générale de la Cinématique appliquée doit donc précéder le cours de Machines, de même que la Cinématique pure a servi d'introduction à la Dynamique rationnelle. Cette étude comprend dans son ensemble les transformations de mouvements. On a proposé à ce sujet bien des classifications successives ; j'ignore si l'on pourra en découvrir une tout à fait satisfaisante, mais il ne m'apparaît pas que la question ait la haute importance qui lui a été longtemps attribuée. Dans une pareille étude, l'important est surtout de bien se rendre compte des conditions dans lesquelles pourront en général s'appliquer les résultats de la théorie; et en outre d'examiner avec des détails suffisants certaines transmissions d'un usage tout à fait fréquent, comme les engrenages, les systèmes articulés, les transmissions par liens flexibles, pour nous borner à un très petit nombre d'exemples.

C'est à dessein que dans ce chapitre je n'ai fait aucu
allusion jusqu'ici à l'enseignement de la plus bell

applications de la Mécanique : je veux parler de la Mécanique céleste. Il est en effet bien difficile de faire rentrer cette science dans le cadre régulier d'un enseignement général de la Mathématique. Elle exige tant de préparation préalable, tant de travail soutenu, qu'en général la culture qu'on en fait constitue une profession ; autrement dit, la Mécanique céleste ne peut guère être enseignée qu'à des astronomes ou à de futurs astronomes.

Il peut y avoir des exceptions, mais rares. Un homme assez instruit en Mathématique pour suivre avec fruit un tel enseignement, sans y avoir aucun intérêt professionnel, y gagnerait assurément une grande supériorité. Ce caractère d'une science appliquée à laquelle vient s'adapter presque rigoureusement la science pure, n'appartient qu'à la Mécanique céleste, ainsi que nous l'avons vu, et lui assure une place éternellement privilégiée. Les théories élevées du Calcul infinitésimal ou du Calcul des fonctions y trouvent leur emploi ; les plus intéressants problèmes de la philosophie naturelle y sont abordés. Quel plus magnifique complément d'une culture intellectuelle pourrait-on rêver ?

Mais les conditions de l'existence moderne se prêtent mal, le plus souvent, à ces satisfactions purement intellectuelles, obtenues par un travail opiniâtre et prolongé. Ce n'est pas en quelques mois que peut s'enseigner l'Astronomie ; la plupart des hommes qui se consacrent à la science sont obligés d'y trouver des ressources pour une carrière ; et les hommes de loisir, qui pourraient en profiter pour meubler leur esprit, sont rarement portés, dans notre monde actuel, vers la culture de la Mécanique céleste !

CHAPITRE VII

La hiérarchie des enseignements [1].

L'enseignement se divise en France en trois degrés : l'enseignement primaire, l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur. Il semblerait que cela répond à peu près à trois catégories sociales d'ordre intellectuel : la masse, la classe moyenne, l'aristocratie. A chacune d'elles est attachée une sanction représentée par des diplômes : certificat d'études pour l'instruction primaire, baccalauréats pour l'instruction secondaire ; licences et doctorats pour l'instruction supérieure. Telle est l'apparence, telle est la théorie. Il s'ensuit, avec l'universalité de l'enseignement primaire, qu'on atteint à ce maximum d'expression de la culture d'un peuple : tout le monde diplômé. C'est l'idéale conception de

(1) Dans ce dernier chapitre, comme dans ceux qu'on vient de lire, c'est exclusivement l'enseignement mathématique qu'on a en vue. Alors même que pour l'abréviation du langage on ne le répéterait pas expressément, il reste donc bien entendu que le mot « enseignement » conservera cette signification restreinte.

Nous ne nous dissimulons pas que les perfectionnements que réclamerait la culture intellectuelle de la jeunesse ne portent pas exclusivement sur ce point, qu'il existe une certaine solidarité entre les diverses branches des connaissances humaines, et qu'une réforme isolée ne serait pas réalisable en dehors d'un plan d'ensemble. Mais ce n'est pas cette réforme générale que nous proposons ici ; nous tenons à rester exclusivement dans notre cadre ; et les réflexions que nous présentons sont simplement des matériaux qui pourront être mis en œuvre lors de la reconstruction intellectuelle, inévitable dans un avenir plus ou moins lointain.

trois ordres de mandarinats : les mandarins de première classe en petit nombre, ceux de deuxième classe occupant cette situation moyenne qui exerce en résumé la plus grosse part d'influence, et fournit au recrutement de l'armée des fonctionnaires ; enfin la troisième classe, renfermant tous les habitants du pays, hommes et femmes, non compris dans les deux premières classes, et pourvus chacun d'un certificat d'études. Pas un ignorant, pas un illettré, sauf les malheureux idiots ou les habitants des asiles d'aliénés ; l'instruction est répandue à flots, largement, gratuitement ; la nuit a cessé ; la lumière intellectuelle éclaire tous les cerveaux, jusque dans les campagnes les plus reculées.

J'ai cherché plutôt à embellir le tableau, sans émettre d'ailleurs aucune opinion sur cette conception d'une hiérarchie intellectuelle correspondant à une hiérarchie sociale. Une appréciation me semblerait inutile, car je me propose d'établir que les choses sont en fait beaucoup moins simples, et que toute cette apparence est un vain mirage. Qu'on s'en réjouisse, qu'on s'en plaigne, là n'est pas la question ; il faut tâcher d'ouvrir tout d'abord les yeux, de se rendre compte de la réalité, au lieu de se payer de formules et de phrases toutes faites.

Commençons par l'enseignement primaire. Quelles que soient les méthodes, quels que soient les programmes, on voudra bien reconnaître que la valeur de l'instruction dépend un peu de celui qui la distribue. Or, les instituteurs représentent une véritable armée ; on aura quelque peine à soutenir qu'ils sont uniformément coulés dans le même moule intellectuel, et qu'en conséquence les résultats de l'enseignement primaire sont identiques partout. C'est manifestement impossible, et ce n'est guère désirable. Il est juste d'ajouter que cette identité des cerveaux chargés de dispenser la science ne se rencontrera pas non plus dans l'enseignement secondaire ; mais on en approchera davan-

tage, grâce à des soins tout particuliers, et aussi parce que le nombre des professeurs est plus réduit.

Mais ce ne sont là que des considérations accessoires; si les trois divisions de l'enseignement ne répondent vraiment à rien de précis, c'est que les limites tracées entre elles sont franchies de toutes parts, et par la force même des choses. Dès que l'enseignement primaire prend un caractère vraiment sérieux, qu'il est pourvu d'une organisation puissante, comme dans certaines grandes villes, et à Paris, par exemple, son premier cadre ne lui suffit plus; il y a toute une population scolaire dont les besoins intellectuels ne sont pas satisfaits par le programme primitif. Il a fallu créer dès lors une branche nouvelle, l'enseignement primaire supérieur, et des établissements spéciaux où cet enseignement est distribué. Donc empiétement du primaire sur le secondaire.

Ce dernier, de son côté, reçoit de tout jeunes enfants (certains parents les lui enverraient en nourrice); il ne veut pas les refuser, et à leur intention il a institué des divisions dans lesquelles l'enseignement primaire leur est distribué; voilà une deuxième violation de frontières.

Maintenant, il faut bien se mettre une chose dans la tête : c'est que dans la proportion d'au moins 999 sur 1000, l'instruction qu'on donne aux enfants ou aux jeunes gens est un moyen, non un but, et que le but, c'est d'arriver à une profession. De là d'innombrables branches d'enseignement professionnel, se rattachant soit à l'enseignement primaire, soit à l'enseignement secondaire; parmi ces professions, il y a notamment celles qui ont justement pour objet le recrutement des éducateurs; de là les écoles normales de toutes sortes s'appliquant aux deux sexes, et venant intéresser à la fois les trois ordres d'enseignement, sans parler des innombrables brevets et diplômes qu'il faudrait un volume pour énumérer.

Les professions techniques exigent la création d'écoles spéciales. Elles se sont multipliées beaucoup au cours du XIXe siècle et se recrutent par des concours. Dans quelle catégorie faire rentrer, par exemple, la préparation aux écoles d'arts et métiers? Il est à peu près admis qu'on la classe dans l'enseignement primaire supérieur; théoriquement, hiérarchiquement, c'est donc sur une marche de l'escalier social moins élevée que l'enseignement secondaire. Et pourtant, s'il y a une différence appréciable entre un candidat à une école d'arts et métiers et un bachelier, c'est qu'en général le premier est plus instruit que le second, sur des sujets sensiblement comparables.

Je viens de parler de bacheliers; on serait en droit de me demander à quelle catégorie je fais allusion, car nous avons eu et nous avons encore des baccalauréats de bien des espèces. On prend des enfants encore jeunes, et on destine les uns aux lettres, d'autres aux sciences; il y a un enseignement secondaire classique, qui certainement n'est pas moderne, et un enseignement secondaire moderne, qui probablement n'est pas classique. D'autres jeunes gens seront dirigés sur l'École polytechnique, par les soins de l'enseignement secondaire, qui leur distribue à cet effet une instruction décorée du nom de « Mathématiques spéciales », nom ne répondant guère au but poursuivi; ceux qui ont définitivement échoué se rejettent souvent sur d'autres écoles.

Bref, les nécessités de la lutte pour l'existence, les innombrables subdivisions, dont nous avons indiqué quelques-unes, la multiplicité des mots, le besoin de se spécialiser outre mesure et avant l'heure, la tendance à centraliser, uniformiser et réglementer, ont engendré un état de choses qui est le renversement complet de la hiérarchie des trois ordres d'enseignement, dont il ne reste rien, que le titre.

Le malheur ne serait pas grand, si tout cela n'avait

produit en même temps un désordre intellectuel lamentable, une absence de vues philosophiques, et finalement une incroyable faiblesse dans les résultats de l'enseignement mathématique; on en demeure convaincu, lorsque l'on essaie de mettre en parallèle les résultats, et les efforts de toute nature faits pour les obtenir.

Que de chemin parcouru depuis l'*Essai d'éducation nationale* de La Chalotais, depuis Condorcet, depuis Lakanal, mais à reculons! Et cependant, ce n'est pas la science qui est en arrière; ses conquêtes, au contraire, apparaissent à tous les yeux et sont universellement proclamées; ce n'est pas non plus l'intelligence moyenne de l'enfance et de la jeunesse qui aurait subi un amoindrissement. Avec des matériaux de premier ordre, avec des élèves bien doués, des professeurs dévoués et instruits, on n'a pu arriver au but, parce qu'on a constamment méconnu les nécessités philosophiques de la science en même temps que les conditions nécessaires de la culture scientifique.

La Mathématique est une. Depuis ses premiers éléments jusqu'à ses plus hautes théories, c'est une science qui se développe harmonieusement. Au lieu de multiplier les compartiments dans lesquels on la distribue par petites tranches soigneusement séparées, il serait besoin au contraire de conserver surtout à l'enseignement mathématique son grand caractère d'unité, accompagné d'une extrême diversité dans les moyens.

Il est juste de reconnaître que le nombre sera petit de ceux qui pourront jusqu'aux sommets accomplir ce voyage. La plupart, retenus par les nécessités, doivent rester en route à un instant donné. Le problème, dès lors, doit se poser de la façon suivante, soit au point de vue scientifique, soit au point de vue social :

Lorsque l'enfant abandonne à un instant quelconque le cours de ses études mathématiques, pour rentrer dans la vie commune, il faut que l'ensemble des connais-

sances acquises représente pour lui une valeur utilisable.

Dès lors, il n'y a pas lieu à la multiplicité des programmes au milieu desquels les professeurs eux-mêmes n'arrivent pas à se reconnaître. Un plan d'études, s'échelonnant sur le nombre d'années qu'on voudra, peut offrir à grands traits le tableau du développement mathématique, sur lequel je n'ai pas à revenir ici, car je serais conduit à reproduire les observations faites dans les chapitres précédents.

La Mathématique ne comporte pas, dans ses éléments, des procédés pédagogiques différents les uns des autres. Qu'un jeune homme soit destiné à devenir membre de l'Institut, commerçant ou industriel, il lui faut toujours débuter par apprendre les règles essentielles du calcul arithmétique, par connaître la nomenclature des figures géométriques les plus simples, en étant capable de les tracer convenablement. Les premiers éléments de la science des nombres et de la science de l'étendue doivent être distribués à tous, suivant le même esprit; je ne dis pas d'une manière identique, croyant surtout, pour les détails de l'enseignement, à l'efficacité de l'initiative qu'y apporte le professeur. Le programme, d'année en année, ne devrait être autre chose qu'un cadre très général, laissant une grande liberté de mouvements dans les limites tracées. On indiquerait seulement, avec insistance, la nécessité de compléter toujours l'enseignement théorique par des applications portant sur des questions relevant des faits réels ; ces applications doivent être bien choisies et convenablement variées, plutôt que multipliées à l'infini. Elles présentent deux avantages : elles contribuent à l'éducation philosophique, au perfectionnement intellectuel en matière mathématique, et en même temps elles sont d'une utilité directe pour ceux qui ne pourront poursuivre ultérieurement leurs études.

Cela n'exclut en aucune façon l'enseignement profes-

sionnel spécial pour telle ou telle carrière, lequel présente une haute utilité; mais chacun de ces enseignements aurait alors une base solide, au lieu de se voir contraint de tout recommencer. Imaginons, par exemple, un enfant qui a seulement séjourné jusqu'à treize ans dans les écoles primaires, ou dans tout autre établissement d'instruction; en dehors du premier apprentissage de début, en supposant qu'il ait entrepris à dix ans ses études, cela représente trois années, au cours desquelles il aura pu acquérir des notions d'Arithmétique et quelques menues connaissances de Géométrie et d'Algèbre élémentaire, complétées par les applications dont nous venons de parler. Pour un motif quelconque, on décide que l'enfant se dirigera vers la carrière commerciale, et pour l'y préparer, on lui fait passer encore une, deux ou trois années dans une école de commerce, exclusivement professionnelle. Cette école, en le recevant, sait sur qui elle peut compter; elle n'aura pas à reprendre les éléments de la science qu'il possède déjà, mais simplement à les appliquer, en vue de la carrière future; peut-être, tout au plus, à les compléter sur quelques points particuliers.

Plus tard, cet enfant arrivé à l'âge d'homme, et lancé dans une vie fort étrangère à la culture des sciences, aura le sentiment très exact de l'utilité retirée par lui de l'instruction mathématique antérieurement reçue. En outre, si peu étendue qu'ait pu être cette instruction, elle lui aura laissé, sur les points qu'elle a embrassés, des idées claires et justes. Il ne proclamera pas, celui-là, tous les sophismes en cours et que j'ai si souvent rappelés. Et j'en pourrais dire autant de toutes les professions; je pourrais le dire, à bien plus forte raison, de celles pour lesquelles la spécialisation n'est obligée qu'à une époque plus tardive; car les jeunes gens qui s'y adonnent ont alors un nombre assez considérable d'années à leur disposition, pour le développement général de leur intelligence.

Il ne s'agit pas, ce serait folie, de faire une nation de mathématiciens, mais de préparer des esprits qui ne soient pas farcis de préjugés et d'idées fausses sur un des points essentiels intéressant le développement de l'intelligence humaine. Dans ce qu'on appelle les carrières libérales, en particulier, c'est une véritable honte pour un pays que de voir, je ne dis pas l'ignorance (tout le monde est ignorant), mais l'inconscience mathématique qui règne souverainement d'une façon si fréquente.

J'ai dit que les vices de l'enseignement mathématique ne tenaient pas au défaut de progrès de la science; je pourrais aller plus loin. Ces progrès mêmes ont contribué à engendrer la confusion et le désordre qu'on peut constater, non seulement dans notre pays, mais un peu partout.

Pour me faire comprendre sur ce point, je ne crois pas inutile de reproduire quelques passages d'un article publié dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* [1], il y a quelques années, en collaboration avec mon ami M. Émile Lemoine.

« Le XIXe siècle a été marqué par un prodigieux entassement de découvertes mathématiques. Les efforts antérieurs, les grandes méthodes dues aux géomètres précédents venaient d'ouvrir des voies nouvelles. D'autre part, la culture des sciences mathématiques, au lieu d'être le privilège de quelques-uns, tendait à se généraliser ; en même temps que le nombre des mathématiciens, celui des recueils périodiques s'accroissait de plus en plus.

« Il s'en est suivi tout naturellement que la quantité des vérités mathématiques en possession desquelles se trouve notre époque est immense, et qu'aucune mémoire

---

(1) *Sur l'orientation actuelle de la Science et de l'enseignement mathematiques ;* numéro du 30 novembre 1893.

humaine ne saurait les posséder toutes... Mais, si l'on y réfléchit, si l'on prend la peine de regarder les choses d'un peu plus près, on ne tarde pas à reconnaître que les vérités en question sont pour une bonne part des vérités de détail, plutôt curieuses que profitables au développement de l'esprit humain...

« ... Cet état de choses appelle une transformation, une réaction qui devra fatalement s'accomplir, et que beaucoup d'esprits prévoient ou pressentent dès maintenant. Il faudra dresser tant bien que mal l'inventaire des vérités acquises, revenir à la culture des méthodes générales, de préférence aux problèmes particuliers, et ayant ainsi déblayé le terrain, poursuivre la marche en avant, à la suite de quelque homme de génie qui viendra nous la tracer. »

Ayant fait ressortir les modifications déjà accomplies en matière d'enseignement dans cette direction d'idées, nous ajoutions ensuite :

« Est-ce à dire qu'on en restera là? Nous ne le croyons en aucune manière, et nous pensons qu'il y a beaucoup de réformes à opérer, qui s'accompliront tout naturellement par la force des choses et sous l'empire de la nécessité. »

Ces réformes, il me semble de plus en plus qu'elles s'imposent, à mesure que nous avançons, et qu'il faudra les introduire dans l'enseignement, indépendamment de la grande refonte scientifique qui peut se faire plus ou moins longtemps attendre. On comprend en effet que la multitude des propositions partielles dont il vient d'être question a pénétré en partie dans l'enseignement, même dans l'enseignement élémentaire ; sous cette influence, la simplicité et l'unité primitives ont subi une altération profonde ; au lieu d'une promenade dans un parc aux allées bien tracées, il s'agit maintenant d'une marche difficile dans un terrain où les accidents se présentent à chaque pas, où les sen-

tiers s'interrompent, s'entrecroisent ou se rejoignent comme au hasard; où des broussailles nous masquent à chaque instant la route à suivre. C'est ce débroussaillement, ce déblaiement qui doit être surtout la grande œuvre actuelle. Lorsqu'il aura été opéré, lorsque les éléments d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie auront été dégagés de la foule des propositions parasites et réduits à l'exposition des idées directrices et des méthodes essentielles, on aura gagné un temps précieux, et du même coup on aura ainsi rendu plus nettes les notions jetées dans les cerveaux. Cela permettra, sans plus de surcharge, d'introduire dans cet enseignement, que plusieurs autres pays ont nommé enseignement moyen, quelques connaissances sur la Géométrie analytique et le Calcul infinitésimal.

Tout cet ensemble, convenablement limité, combiné en vue du perfectionnement intellectuel, éclairé par de judicieuses applications, ne dépasse en aucune façon la portée de l'intelligence moyenne, et représente la substance de ce que tout homme d'une instruction ordinaire doit connaître en Mathématique.

En l'échelonnant sur le nombre d'années qu'on jugerait convenable, il ne serait pas difficile d'amener les jeunes gens à en avoir la possession complète à l'âge où d'ordinaire ils viennent demander au baccalauréat la sanction de leurs études.

Sur les bases que nous venons d'indiquer, et laissant de côté le premier enseignement pratique de l'enfance, on voit que l'enseignement mathématique, donné dans des écoles, dans des collèges ou lycées, dans des établissements libres, ou ailleurs, ne comprendrait qu'une seule catégorie : l'enseignement classique, si l'on tient absolument à lui accoler une épithète.

Parmi ceux qui l'auraient reçu, et à des degrés divers d'avancement, les enseignements professionnels de toute nature viendraient se recruter. Dirigés en vue des applications de la science, ils seraient aussi nom-

breux que le comporteraient les besoins auxquels ils répondent.

Enfin, comme couronnement de l'enseignement ordinaire, subsisterait l'enseignement supérieur actuel sous un titre ou sous un autre. En France, c'est sur ce point qu'il y a le moins de critiques à faire; et les imperfections qui subsistent tiennent peut-être à des causes trop étrangères à la science pour que d'ici bien longtemps nous puissions espérer y voir porter remède. Ces imperfections peuvent se résumer d'un mot : excès de centralisation.

L'enseignement supérieur en France, actuellement et depuis bien des années, est distribué par des hommes d'une haute culture intellectuelle, dont quelques-uns sont des illustrations scientifiques. Le mérite de leurs travaux et l'excellence moyenne de leurs leçons sont au dessus de tout éloge. Malgré cela, quand on parle de l'enseignement supérieur en France, l'esprit se porte immédiatement sur Paris d'une façon exclusive. C'est à ce point que les facultés des départements, qui en ont pourtant le droit en théorie, en sont venues à ne plus recevoir de docteurs ès sciences mathématiques; on donne immédiatement le conseil de s'adresser à Paris, à tout candidat qui se présente avec des projets de thèse. Il est résulté de cet état de choses qu'un jeune savant envoyé dans une faculté de province n'a le plus souvent qu'un souci : arriver à Paris pour y poursuivre sa carrière. S'il y réussit, la faculté qu'il quitte y perd un homme de valeur. S'il croit devoir y renoncer, il organisera son existence de manière à ne plus quitter la faculté à laquelle il appartient; mais, en présence du petit nombre d'auditeurs, de l'obscurité relative de son enseignement, quel qu'en soit le mérite, il cessera parfois de poursuivre des recherches purement scientifiques, se fera une philosophie résignée et quelque peu découragée, donnera

toujours un bon enseignement, copie fidèle de celui de l'année précédente, mais sans flamme et sans entrain.

Il n'est pas rare, dans les Universités étrangères, de rencontrer des jeunes gens qui parcourent l'Europe entière, passant quelques mois dans une ville, puis dans une autre, pour y suivre les cours d'un professeur en renom sur une partie déterminée de la science. Ils passeront un trimestre à Leipzig, un autre à Göttingen, se dirigeront ensuite vers Moscou ou vers Bologne, le tout pour devenir plus instruits dans leur science de prédilection. Même chez nous, combien n'avons-nous pas vu jadis, à la Sorbonne où au Collège de France, de ces jeunes étrangers devenus nos hôtes, uniquement dans le but d'entendre les leçons de Cauchy, de Liouville, ou de M. Hermite ? A l'heure actuelle, j'en sais qui ont traversé l'Europe pour suivre un cours de M. Poincaré ou de M. Picard, Mais en a-t-on jamais rencontré, dont le but ait été d'aller chercher des éléments d'instruction dans un cours fait à Bordeaux, à Caen ou à Toulouse ? La France scientifique, la France mathématique, pour eux, c'est Paris, rien que Paris. Pour nous aussi, malheureusement; nous avons pléthore au centre, anémie et atrophie aux extrémités; la vie scientifique ne circule plus; et cependant, que d'éléments merveilleux, que de richesses intellectuelles sont de la sorte inutilisées, enfouies presque, dans la plupart de nos facultés des sciences !

Il est à noter, non sans regrets, que les jeunes gens dont je parlais tout à l'heure, et qui viennent résider successivement, pour s'instruire, dans de nombreuses Universités des divers pays, se rencontrent en Russie, en Allemagne, en Italie, un peu partout, excepté en France. Nous restons chez nous ; l'instruction élevée n'est pas un but, mais un moyen ; ceux de nos compatriotes qui ne sont pas obligés matériellement à exercer une profession ne mettent pas leur ambition à acquérir des connaissances scientifiques supérieures. Il suit de

là que, même en France, les auditeurs de nos facultés des sciences, dans une proportion considérable, et même presque exclusivement, sont des candidats aux fonctions de professeur. Et le corps enseignant, dans cet ordre d'idées, paraît n'avoir d'autre utilité que de s'alimenter lui-même, au lieu de faire profiter l'ensemble du pays de la science qu'il distribue libéralement. Il faudrait, pour modifier une telle situation, que la valeur scientifique fût reconnue comme présentant une utilité effective ; ce serait une transformation totale des habitudes et des opinions. Les siècles l'opéreront peut-être, mais nous ne pouvons ici que constater le mal, sans indiquer aucun remède. Nulle organisation ne peut opérer à bref délai une refonte de la matière cérébrale de tout un peuple.

Tout jeune Français qui a terminé ce qu'on appelle actuellement « ses études », en justifie en se faisant délivrer ce diplôme de baccalauréat sans lequel un nombre énorme de carrières restent fermées devant lui. Que le baccalauréat soit d'une espèce ou d'une autre, il renferme toujours dans ses programmes quelques articles plus ou moins étendus se rapportant aux connaissances mathématiques. Le diplôme constitue, en résumé, une sorte de certificat d'ensemble, et tout le monde sait qu'il n'a aucune signification bien précise.

A l'heure actuelle, spécialement, le baccalauréat consacre une véritable décadence de l'enseignement scientifique. On peut s'en convaincre en lisant une excellente étude de M. H. Vuibert, publiée dans son *Annuaire de la Jeunesse* (1897), sous le titre : *Projets de réforme du baccalauréat*. Ne pouvant analyser cette discussion serrée, nourrie d'arguments et de faits irréfutables, nous tenons du moins à reproduire quelques chiffres, plus éloquents dans leur netteté que tous les discours du monde. C'est d'abord un tableau qui montre dans quel sens ont été accomplis les progrès scientifiques.

		Part revenant aux sciences dans l'ensemble des suffrages.	
		Épreuves écrites (admissibilité).	Épreuves écrites et orales.
Baccalauréats actuels.	Baccalauréat de l'enseignement classique (1re partie).	Néant.	20 p. 100
	Baccalauréat de l'enseignement moderne (1re partie).	—	25 —
Baccalauréats anciens.	Baccalauréat de l'enseignement spécial	40 p. 100	46 —
	Baccalauréat ès sciences .	66 —	55 —

Voici maintenant la statistique du nombre des candidats à l'École polytechnique dans ces dernières années (et, comme le fait avec raison remarquer M. Vuibert, la qualité ne compense pas la quantité) :

1893.	1 715 candidats.
1894.	1 669 —
1895.	1 527 —
1896.	1 300 —
1897.	1 049 —

Ceux qui ne trouveraient pas que c'est assez instructif sont vraiment difficiles.

L'institution elle-même du baccalauréat a été très discutée depuis longtemps; dans des directions diverses, on a versé à ce sujet des flots d'encre ; mais elle a résisté jusqu'à présent à tous les assauts. Le baccalauréat possède certainement un mérite : c'est de servir de moyen d'élimination contre le flot envahissant des candidats aux fonctions publiques. Mais en dehors de cette valeur indirecte, il me semble, en principe, correspondre assez bien à l'organisation de notre enseignement secondaire actuel. Puisque cet enseignement, suivi pendant un

assez grand nombre d'années, est réputé inutile tant qu'on ne l'a pas poussé jusqu'au bout, et puisqu'il est effectivement inutile, je trouve naturel qu'on en attende la terminaison pour délivrer un certificat constatant qu'on s'est assimilé l'ensemble des notions acquises.

Il en serait autrement avec un enseignement rationnel comme celui dont nous avons essayé d'indiquer l'esprit. D'année en année, par l'appréciation générale des progrès accomplis, complétée au moyen de quelques épreuves, il serait facile de se rendre compte de la valeur de l'élève; on saurait s'il y a lieu de le laisser poursuivre, ou bien s'il est préférable de lui faire recommencer l'année d'études dont il n'a pas su ou voulu profiter. La suite des certificats dont il s'agit composerait un véritable baccalauréat fractionné en six, sept ou huit morceaux, mais qui aurait une signification bien nette. Et le jeune homme ayant arrêté son instruction classique générale, à un instant quelconque, serait à même de faire la preuve, par les certificats obtenus, des connaissances acquises par lui. C'est nécessairement une organisation de ce genre qui prévaudra un jour, mais seulement après une refonte d'ensemble, et lorsqu'on aura pris pour but de former des hommes, plutôt que de préparer des bacheliers.

Je ne saurais terminer ces réflexions rapides sur le baccalauréat, sans ajouter une observation qui me paraît indispensable. Elle porte sur l'usage, sur l'abus qu'on fait du personnel de l'enseignement supérieur en l'employant à la fabrication des bacheliers. N'est-il pas triste de voir attelés à cette besogne ingrate et infime des hommes qui sont l'honneur de la science? A Paris, notamment, où les candidats se présentent par milliers, où les épreuves emploient des semaines entières, il est incompréhensible que des savants considérables soient arrachés à leurs travaux, pour entendre des candidats au baccalauréat ès lettres prouver qu'ils ne savent pas

résoudre une équation du premier degré, ni mener une perpendiculaire sur le milieu d'une droite. C'est un véritable vol fait à la science, surtout quand on se dit qu'il y a des milliers de professeurs de tous ordres capables de remplir aussi bien ces fonctions qui ne réclament que de l'attention et de la conscience. Depuis quand va-t-on chercher les généraux de division pour interroger les conscrits sur le maniement d'armes?

Lorsqu'à la Sorbonne il m'est arrivé de voir un Poincaré, un Hermite ou un Picard en devoir d'interroger des candidats bacheliers, je me demandais si c'était le candidat ou l'examinateur qui méritait le plus de compassion, et j'ai toujours trouvé que ce spectacle était scientifiquement un véritable scandale.

Les deux autres grades universitaires, nous l'avons dit, sont ceux de licencié et de docteur. La licence a été l'objet, assez récemment, d'une réforme partielle dont on n'a pu apprécier encore les résultats, mais qui en soi me semble tout à fait raisonnable, et correspond un peu aux idées exprimées tout à l'heure. On lui a substitué une suite de certificats portant sur les diverses branches de la science mathématique. Quant au doctorat, il n'y a guère d'observations à faire à ce sujet dans des considérations générales comme celles que nous reproduisons ici. Ce n'est pas un examen, mais une constatation de recherches personnelles et de travaux présentant un caractère d'originalité.

En principe tout au moins, celui à qui est décerné le grade de docteur a dû, dans une mesure petite ou grande, apporter sa contribution à l'avancement de la science. Par sa nature même, ce grade ne saurait être prodigué, bien que, parmi les membres de l'enseignement surtout, le nombre des docteurs se soit sensiblement accru dans ces dernières années. Les facilités de publication, de plus en plus grandes, ont contribué à cette augmentation, dont on ne peut que se réjouir;

elle prouve en effet que l'amour de la science et l'ardeur au travail n'ont pas faibli dans notre corps enseignant, et qu'en cette matière comme en bien d'autres les individus sont de beaucoup supérieurs aux institutions.

J'ai indiqué plus haut les nombreuses branches de l'enseignement professionnel, représentées par une foule d'écoles, depuis les arts et métiers jusqu'à l'École Polytechnique et les écoles d'application, depuis les écoles d'instituteurs primaires jusqu'à l'École Normale supérieure. Tous ces établissements se recrutent en général par des concours, variables à l'infini, et auxquels il convient d'ajouter les concours d'agrégation, essentiellement professionnels par nature et s'appliquant aux professeurs de l'Université.

Je ne parle pas ici des concours généraux, cette institution établie en vue du *prix d'honneur*, et qu'il suffit de signaler au passage comme l'une des plus néfastes à la culture mathématique générale. La question est jugée par tous les hommes de bonne foi qui n'y ont pas un intérêt direct, et ne vaut pas la peine d'une discussion. La constatation suffit.

Pour les divers concours dont je viens de parler, de même que pour les grades universitaires des baccalauréats ou de la licence, on fait subir aux candidats des examens, composés en général d'épreuves écrites et d'épreuves orales, avec quelques épreuves supplémentaires dans certains cas particuliers.

S'il s'agit d'un grade, les candidats qui font preuve, à ces examens, de connaissances suffisantes, sont admis et reçoivent leur diplôme. S'il s'agit d'un concours proprement dit, on admet dans la limite fixée, non pas tous ceux qui ont fait preuve de capacité, mais les premiers d'entre eux, c'est-à-dire ceux qui ont montré plus de savoir que leurs concurrents.

On a souvent élevé des critiques sur cette organisa-

tion des examens, et la question est assez importante, en matière mathématique, pour mériter qu'on s'y arrête un peu.

Une observation préliminaire me semble s'imposer. Je devine bien, à peu près, comment, pour les examens purs et simples, pour les grades universitaires par exemple, on pourrait arriver à tourner la question. Mais, pour les concours, elle me semble se poser d'une façon impérieuse et nette. Prenons l'une quelconque des grandes Écoles : École Normale Supérieure, École Centrale, École Polytechnique, par exemple. Il y a 200 places disponibles ; 1 000 candidats viennent se présenter ; il faut bien trouver un moyen de sélection, on est bien obligé de laisser 800 postulants à la porte. Va-t-on recourir à un tirage au sort ? Va-t-on essayer une constatation de capacité suffisante, et faire intervenir ensuite le sort, parmi les bons candidats ainsi désignés, pour décider de l'admission ? Va-t-on faire une enquête personnelle sur chacun d'eux, et se prononcer d'après les renseignements obtenus ? Le service public, intéressé à avoir non pas seulement les bons, mais *les meilleurs*, ne se contenterait pas probablement d'un de ces expédients comme solution. Et parmi les personnes qui critiquent le plus vivement et le plus amèrement l'institution des concours, je crois fort qu'il s'élèverait une véritable clameur, si l'on remplaçait ce régime par celui du hasard ou du bon plaisir.

Les concours assurément ne sont pas une institution parfaite, pas plus qu'aucune autre des institutions humaines ; mais en allant jusqu'à les considérer comme un mal, c'est un mal nécessaire, et moins redoutable que tout ce qu'on pourrait essayer de mettre à la place. Ramené à ces termes, le problème, et il a certes une grosse importance, consiste donc à chercher la méthode de nature à assurer les choix les plus judicieux, et à éliminer le plus possible l'influence des erreurs d'appréciation et du hasard.

Parmi les auteurs qui ont critiqué avec le plus de force le système des examens en matière mathématique, il faut citer Lacroix, dans ses *Essais sur l'enseignement*, dont j'ai parlé plus haut. C'est surtout aux examens oraux qu'il adresse ses reproches. Ceux-ci portent sur l'abus du rôle de la mémoire, sur la préparation artificielle résultant des objections prévues que feront les examinateurs, sur la facilité avec laquelle s'envolent de l'esprit les notions acquises dans de pareilles conditions, sur l'influence néfaste de la timidité; enfin sur l'inégalité que les examens successifs présentent entre eux.

Pour remédier à ces inconvénients, Lacroix préconise les examens écrits, et propose, pour les épreuves orales, une modification qui consiste surtout en ceci : demander au candidat dans quel auteur il a appris telle branche de la science, sur laquelle il peut être interrogé; lui présenter l'ouvrage en question, et l'inviter à en expliquer tel ou tel chapitre, en accompagnant de commentaires et de réponses à des observations l'explication dont il s'agit. Des considérations, d'ailleurs intéressantes et justes, sur l'enseignement lui-même montrent que dans toute cette discussion Lacroix vise les examens proprement dits plutôt que les concours, et qu'il n'a pas, conséquemment, serré de près la question difficile soulevée par lui.

La modification des examens oraux qui vient d'être indiquée, peut-être à la rigueur applicable en 1828, serait impossible aujourd'hui dans la pratique, avec l'abondance des publications classiques qui s'est produite depuis lors; il faudrait que chaque examinateur traînât derrière lui une bibliothèque; et, de plus, telle désignation d'un livre par le candidat ne pourrait-elle pas indisposer à elle seule l'esprit de l'examinateur ? D'ailleurs, en fait, nous l'avons dit, on ne se prépare plus aux concours en se servant de livres.

Il y aurait cependant à tirer parti, sinon du procédé lui-même, du moins de l'esprit dans lequel l'a

proposé l'homme de très grand mérite que nous venons de citer. Si, par exemple, on interrogeait un candidat, en lui demandant quelle théorie d'une science comprise dans son programme l'a particulièrement intéressé, en l'invitant à exposer les principes et les propositions essentielles qui constituent cette théorie, on pourrait apprécier autre chose que les résultats passagers d'un effort de mémoire. Malheureusement, l'expérience qui a été tentée n'a produit généralement que des résultats négatifs, les candidats ressentant plus de surprise et d'embarras que si on leur avait demandé d'emblée un calcul très compliqué ou une démonstration pénible à retenir. Ce n'est peut-être pas une raison pour renoncer d'avance à cette tentative ; en la généralisant un peu plus, on amènerait peut-être la moyenne des candidats à essayer de réfléchir sur les notions qu'ils ont apprises. Mais c'est plutôt une affaire de pratique de la part des examinateurs, qu'une réforme fondamentale de principe.

En somme, le mécanisme général des examens et des concours n'est pas ce qu'il y a de plus critiquable dans notre organisation actuelle. Les plus grands défauts qu'ils présentent tiennent aux imperfections générales de l'enseignement lui-même, et aussi, on doit le dire, au bouleversement invraisemblable que subissent périodiquement les programmes. En dehors de cela, on a cherché à corriger le hasard par une assez grande multiplicité d'épreuves, les unes écrites, les autres orales. On pourrait au besoin aller encore un peu au delà, et diviser ainsi plus complètement les responsabilités, en réduisant la part d'influence de chacun des examinateurs. Mais dans les concours où les candidats se présentent par centaines, il faut bien tenir compte aussi du temps dont on dispose, et des possibilités qui s'ensuivent. Sans cela, et un peu dans le même ordre d'idées que celui de Lacroix, il ne serait pas sans intérêt de faire faire aux candidats de véri-

tables leçons sur des sujets un peu généraux indiqués quelques heures à l'avance, comme cela s'est fait pour l'agrégation. Mais est-il possible de procéder ainsi quand à un seul concours il se présente plus de 2 000 candidats ?

Malgré les inconvénients signalés, et qui sont inévitables dans une certaine mesure, pourvu que les examinateurs choisis soient des hommes instruits, judicieux et consciencieux, les examens, et même les examens oraux, resteront encore la plus acceptable des méthodes de sélection. Il n'est pas impossible d'égaliser entre eux les divers examens de manière à ce qu'ils présentent des difficultés comparables ; de réduire le rôle de la mémoire en demandant quelques applications simples ; de passer en revue à peu près toutes les matières du programme, de manière à ne pas laisser croire aux candidats qu'on éprouve pour certaines d'entre elles une prédilection exceptionnelle. Il faut aussi se mettre en garde contre ce sentiment, d'ailleurs très humain, qui vous porte à mieux apprécier une méthode ou une démonstration que telle autre méthode ou telle autre démonstration, pour résoudre une question quelconque. Le candidat ne peut exposer que ce qui lui a été enseigné ; et si ce qu'il expose est raisonnable, on doit l'écouter et accepter ses explications, trouvât-on qu'il y a mieux. Quant au rôle de la timidité, sur laquelle on a toujours tant déclamé, il est moins considérable en général qu'on ne se l'imagine ; et il appartient à l'examinateur de le réduire au minimum, par la forme même de ses interrogations ; c'est une affaire de tact et d'observation de soi-même.

Dans les observations directes qu'il m'a été donné de faire sur ce sujet important, je dois déclarer que la grande majorité des examinateurs ayant la responsabilité des concours m'ont semblé présenter à un très haut degré les qualités que je viens de décrire, et apporter à leur tâche toute l'attention, la conscience et

l'impartialité qu'elle exige. Est-ce à dire qu'ils ne se trompent jamais ? Ne voit-on pas réussir dans les concours des candidats relativement faibles, tandis que d'autres plus instruits sont refusés ? Certes, cela doit arriver, mais cela n'arrive qu'à titre d'exception. Personne au monde ne saurait prétendre à l'infaillibilité, et le hasard vient toujours jouer un certain rôle dans les événements humains.

Mais on doit proclamer que si l'enseignement mathématique dans notre pays ne présentait pas de plus grandes imperfections que celle-là, on pourrait s'abstenir de toute critique.

Parvenu à la fin de la tâche entreprise, et jetant un coup d'œil sur le chemin parcouru, je sais gré au lecteur qui se sera donné la peine de me suivre jusqu'au bout, et je l'en remercie.

Sous une forme que j'aurais voulu rendre moins imparfaite et moins aride, j'ai tenté de montrer que la Science mathématique mérite l'admiration des hommes, non seulement par les services directs qu'elle nous rend, mais par les perfectionnements qu'elle apporte à la culture générale de l'esprit humain, et par les satisfactions intellectuelles qu'elle donne à ses adeptes.

Ceux qui en médisent la connaissent mal; et ils la connaissent mal parce qu'elle leur a été mal enseignée.

L'éducation mathématique pourrait devenir un des plus puissants instruments de progrès et de civilisation, au prix de quelques réformes faciles.

Si j'ai pu hâter d'un jour l'accomplissement de ces réformes, si j'ai pu montrer à un seul de mes contemporains qu'il y a dans la Mathématique autre chose que des conventions et des formules, et si j'ai décidé celui-là, suivant la belle expression de Rabelais, *à rompre l'os et à sucer la moelle*, j'ai la conscience que ce petit livre n'aura pas été complètement inutile.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE[1]

AMPÈRE. — *Essai sur la philosophie des sciences.* 2 vol. in-8°, 1re édition, 1834-1843; 2e édition, 1857.

J.-F. BONNEL. — *De l'imagination dans les principes des sciences exactes.*

CARNOT. — *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal.* 1re édition, 1797; 2e édition, 1860.

AUG. COMTE. — *Cours de philosophie positive.* 1re édition, 1839-1842, 6 vol. in-8°; 2e édition (avec préface de Littré), 1864.

AUG. COMTE. — *Traité élémentaire de géométrie analytique.* 1re édition, 1843; nouvelle édition, 1894.

COURNOT. — *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique.* 2 vol. in-8°, 1851.

COUTURAT. — *De l'infini mathématique.* In-8°, 1896.

COYTEUX. — *Exposé des vrais principes des mathématiques.* In-8°, 1858.

DAUGE. — *Méthodologie mathématique.* Grand in-4°; Gand, 1883. Nouvelle édition, 1896.

DELBŒUF. — *Prolégomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats.* In-8°, Liège, 1868.

DESCARTES. — *Géométrie.* 1re édition, Leyde, 1637; nouvelle édition, 1886.

---

(1) Cette liste est purement indicative; elle ne saurait en aucune façon constituer une bibliographie tant soit peu complète de la philosophie mathématique; mais il nous a paru qu'elle pouvait quand même présenter un certain intérêt pour quelques lecteurs.

DU BOIS-REYMOND. — *Théorie générale des fonctions.* Traduit de l'allemand par G. Milhaud et A. Girot. In-8°, 1887.

DUHAMEL. — *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.* 5 vol. in-8°, 1877-1885.

FREYCINET (CH. DE). — *Essai sur la métaphysique du haut calcul.* In-8°, 1re édition, 1860; 2e édition, 1881.

FREYCINET (CH. DE). — *Essai sur la philosophie des sciences* (Analyse, Mécanique). In-8°, 1896.

FOUCHER (l'abbé). — *La géométrie métaphysique.* In-8°, 1758.

JACQUIER. — *De l'esprit des mathématiques supérieures.* In-8°, 1873.

LACROIX. — *Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier.* In-8°, 1828.

LAPLACE. — *Essai philosophique sur le calcul des probabilités.* In-8°, 6e édition, 1840.

LIARD. — *Définitions géométriques et définitions empiriques.* 1re édition, 1873 ; 2e édition, 1887.

A. PICART. — *Introduction aux principes mathématiques des lois générales du monde physique.* In-8°, 1882.

PRONY. — *Mécanique philosophique.* In-4°, 1800.

TABLE DES NOMS CITÉS

TABLE DES MATIÈRES

LA MATHÉMATIQUE

PHILOSOPHIE — ENSEIGNEMENT

LA MATHÉMATIQUE APPLIQUÉE — PHILOSOPHIE

ENSEIGNEMENT

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY



GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS
3, RUE RACINE, PARIS

Huitième année.

REVUE GÉNÉRALE
DES SCIENCES
PURES ET APPLIQUÉES

Paraissant le 15 et le 30 de chaque mois

PAR LIVRAISONS GRAND IN-8° COLOMBIER RICHEMENT ILLUSTRÉES

ABONNEMENT ANNUEL :

Paris, **20** fr. ; Départements, **22** fr. ; Union postale, **25** fr.
Prix du numéro : **1** fr. **25**

Lorsqu'il y a huit ans un Comité de Savants, d'Ingénieurs et d'Agronomes se constituait pour créer, sous la direction de M. Louis Olivier, la *Revue générale des Sciences*, nul ne pouvait prévoir le rapide essor réservé à cette grande publication, la place non seulement considérable, mais prépondérante, qu'elle allait bientôt prendre dans la littérature scientifique du monde entier, l'influence qu'elle exercerait, dans notre pays, sur la marche des sciences et l'application de leurs conquêtes à la vie pratique.

Groupant les forces scientifiques éparses sur le territoire de la France, attirant aussi à elle les savants de l'Étranger, la *Revue* entreprenait de faire concourir les efforts de tous à l'étude des grands problèmes scientifiques, agronomiques et industriels, que se pose la société contemporaine.

Tel a été le succès de ce programme qu'il est devenu aujourd'hui inutile d'y insister : la *Revue générale des Sciences* est actuellement répandue dans le monde entier, ses services universellement appréciés, son autorité

partout reconnue ; on peut dire, sans abuser des mots, qu'elle constitue véritablement une œuvre d'utilité publique.

Son domaine embrasse toutes les sciences, depuis les spéculations les plus élevées de la philosophie scientifique jusqu'au détail le plus précis de l'application. Signalant le progrès dès qu'il apparaît, elle suit, pas à pas, les travaux scientifiques depuis le laboratoire du savant, où les découvertes éclosent, jusqu'à l'usine, où l'ingénieur et l'industriel les mettent en œuvre.

Indiquons d'abord la composition de chaque livraison. Nous donnerons ensuite un aperçu des principaux sujets récemment traités dans la *Revue*.

COMPOSITION

DE CHAQUE LIVRAISON DE LA REVUE

Chaque livraison comprend cinq parties :

1° *Une chronique ;*
2° *Plusieurs articles de fond ;*
3° *L'analyse critique des ouvrages récents ;*
4° *Les comptes rendus des travaux soumis aux Sociétés savantes de la France et de l'Étranger;*
5° *Le relevé des articles récemment publiés par les principaux journaux scientifiques d'Europe et d'Amérique.*

I. Chronique. — Chaque livraison de la *Revue* débute par la *Chronique des événements scientifiques de la quinzaine écoulée.* Cette chronique se compose d'une série de petits articles, sortes de notes méthodiquement classées, qui indiquent, en tout ordre de science, les *faits d'actualité.* Visant surtout à *signaler les nouveautés* et à en donner une description exacte, ces notes

sont, quand il y a lieu, illustrées de dessins, de gravures et de photographies. Elles sont envoyées à la *Revue* par une pléiade de savants dont chacun se charge de relever les inventions ou procédés nouveaux qui surgissent dans sa spécialité. Toutes sont signées, de telle sorte que le lecteur particulièrement intéressé puisse s'adresser à l'écrivain pour un supplément d'information.

II. Articles de fond. — La deuxième partie de la *Revue*, — de beaucoup la plus développée, — se compose des *articles de fond*, ordinairement au nombre de *quatre*. Ces articles ont pour objet principal d'exposer l'état actuel des *grandes questions scientifiques* à l'ordre du jour.

Il arrive souvent, en science, que tous les éléments requis pour résoudre un problème existent, sans qu'il y paraisse. La solution globale reste latente, inaperçue, tant que les solutions partielles, qui apportent chacune sa part de lumière, demeurent sans lien, disséminées de tous côtés. Il importe de les rapprocher pour arriver, en les additionnant, à la solution complète de la question. De telles synthèses, faites avec critique, sont infiniment précieuses pour le lecteur, qui n'a ni la compétence ni le loisir de colliger sur chaque sujet qui l'intéresse tous les Mémoires qui s'y rapportent. Le chimiste ne peut pas compulser tous les travaux des physiciens, aussi est-il bien aise de lire un article qui les résume. Et il en est ainsi de tous les lecteurs : quelle que soit la spécialité de chacun, tous désirent être *rapidement mis au courant* de la marche générale des sciences adjuvantes de la leur.

Se pourrait-il, d'ailleurs, qu'à une époque où la science pénètre si intimement la vie sociale, chacun restât indifférent aux découvertes qui surgissent en dehors du sillon où il cherche ? Les applications de l'Electricité, les Rayons X, les découvertes dont la glande thyroïde vient d'être l'objet, les tentatives récemment faites en

vue de guérir la tuberculose et le cancer, touchent de trop près aux intérêts vitaux de l'humanité, pour ne pas susciter la curiosité universelle : elles s'imposent à l'examen de tous les esprits cultivés.

La *Revue générale des sciences* rend à ses lecteurs l'inappréciable service de leur donner d'*une façon méthodique* la *mise au point* de toutes ces grandes questions d'intérêt général. Chaque fois qu'une découverte importante vient d'être réalisée, à quelque science qu'elle se rapporte, la *Revue* prend soin de la décrire; elle en expose l'*origine*, le *développement*, l'*état actuel*, la *portée* et les *applications*.

Des dessins, graphiques, cartes géographiques, gravures de toutes sortes et photogravures, dus aux meilleurs artistes, sont joints au texte toutes les fois que cela est utile à la clarté de la description.

C'est toujours aux auteurs mêmes des découvertes que la *Revue* a soin de demander ces articles. Elle s'adresse dans ce but aux savants de tous les pays, et c'est là l'un de ses traits les plus originaux. Toute la presse a rendu hommage à l'éclat d'une telle collaboration. Le *Journal de Saint-Pétersbourg* écrivait récemment à ce propos :

« ... Ce qui a valu à la *Revue générale des Sciences* un succès aussi général, c'est qu'elle recueille sa collaboration dans tous les grands centres de la production scientifique, aussi bien à la Société Royale de Londres qu'à l'Académie des Sciences de Paris ; aussi bien à Berlin, à Moscou, qu'à Philadelphie ou à Rome.

« Ayant des collaborateurs dans toutes les grandes villes de l'Europe, la *Revue* compte aussi dans toutes de nombreux lecteurs. Et ce ne sont pas seulement les savants, les professeurs, physiciens, chimistes, biologistes, etc., qui se font un devoir de la lire : elle a pénétré plus intimement dans la vie de notre société contemporaine ; c'est ainsi que, chez nous, par exemple, elle est consultée par tous ceux qui travaillent au progrès de la science et aussi par l'élite de nos ingénieurs et de nos industriels. Les hommes pratiques qui se préoccupent d'appliquer les résultats

des recherches scientifiques, trouvent, en effet, dans la *Revue*, à côté du mouvement scientifique pur, — c'est-à-dire de l'exposé des découvertes et des doctrines qu'elles suscitent, — l'indication détaillée de toutes les nouveautés scientifiques susceptibles d'intéresser le spécialiste, le praticien, qu'il s'agisse de Médecine, d'Agriculture, d'Industrie ou de Commerce. Là surtout est le secret du succès de la *Revue générale des Sciences*. »

(Le *Journal de Saint-Pétersbourg* du 19 avril 1896.)

Le *Journal de Saint-Pétersbourg*, qui consacrait ces lignes à la *Revue* dans une étude sur le mouvement scientifique en Russie, soulignait, comme on vient de le voir, le haut intérêt de la série d'articles, également très appréciés en France, que la *Revue* fait paraître sur l'*état actuel et les besoins de nos grandes industries*.

Mais ces sujets, et ceux qui se rapportent à la science pure, ne sont pas les seuls que la *Revue* étudie : elle traite aussi, dans ses articles de fond, les questions de *Géographie économique*, en particulier les *questions coloniales*. En de telles matières, la Science a non seulement le droit, mais le devoir d'intervenir. C'est à elle de nous renseigner sur la salubrité de nos colonies, sur les richesses minérales, forestières ou culturales, qu'il est possible d'en tirer. La *Revue générale des Sciences* fait large place à ces études qui, à juste titre, passionnent aujourd'hui l'opinion.

III. Analyse critique des publications nouvelles. — Cette troisième partie de la *Revue* est consacrée à l'analyse détaillée et à la critique de tous les ouvrages importants récemment parus sur les sciences mathématiques, physiques et biologiques et sur les applications de ces sciences à l'Art de l'Ingénieur, à la Construction mécanique, à l'Agriculture, à l'Industrie, à l'Hygiène publique et à la Médecine.

Ces résumés sont assez détaillés pour dispenser le plus

souvent le lecteur de se reporter aux ouvrages originaux.
Toutes ces analyses bibliographiques sont faites par des *spécialistes* et signées de leurs noms.

IV. Comptes rendus des Académies et Sociétés savantes. — Cette quatrième partie de la *Revue* expose les travaux présentés aux principales Académies et Sociétés savantes de la France et de l'Etranger :

Académie des Sciences de Paris ;
Académie de Médecine ;
Société de Biologie ;
Société française de Physique ;
Société Chimique de Paris ;
Société Royale de Londres ;
Société de Physique de Londres ;
Société de Chimie de Londres ;
Société Royale d'Edimbourg ;
Société anglaise des Industries chimiques ,
Académie des Sciences d'Amsterdam ;
Etc., etc...

La *Revue* a tenu à publier, dès leur apparition, l'analyse détaillée des travaux soumis aux principales sociétés savantes de l'Étranger. Dans ce but elle a organisé, avec le concours de certains de leurs membres, un *service régulier de correspondance.* Les comptes rendus que la *Revue* reçoit de ces savants, offrent d'autant plus d'intérêt que les bulletins de la plupart des Sociétés de l'Etranger ne paraissent que très longtemps, quelquefois un an, après les séances. En donnant par anticipation un résumé détaillé de ces travaux, la *Revue* rend à tous les chercheurs un service inestimable.

V. Relevé des sommaires des journaux scientifiques de la France et de l'Etranger. — Dans un *Supplément* qui accompagne toutes ses livraisons, la *Revue générale des*

Sciences publie la liste de tous les articles originaux récemment parus dans les principaux journaux scientifiques du monde entier. Les sommaires d'environ deux cents de ces périodiques sont ainsi relevés; les titres de tous leurs articles sont cités *en français*, avec la mention du nom de l'auteur et de la date de la publication du fascicule qui les contient. Plus de quatre cents articles ou mémoires sont ainsi cités dans chaque livraison.

Ce vaste répertoire de la production scientifique actuelle est infiniment précieux aux travailleurs qui, grâce au mode de classement adopté, trouvent tout de suite, dans le relevé des périodiques, l'ordre de science qui les intéresse.

Comme on le voit, ces cinq parties de la *Revue*, régulièrement représentées dans chaque livraison, sont disposées de telle sorte, que l'ENSEMBLE DE LA PRODUCTION SCIENTIFIQUE CONTEMPORAINE se trouve revisé, d'une part avec assez de détail pour qu'aucun travail de valeur n'échappe au spécialiste intéressé, d'autre part avec assez d'ampleur, de critique et de méthode, pour fixer nettement dans l'esprit du lecteur l'*état précis du progrès théorique et pratique en chaque science*.

Tous ceux qui, à des titres divers, s'y intéressent, — savants, hommes de laboratoire, professeurs, chimistes, médecins, ingénieurs, agronomes, industriels, gens du monde curieux des choses de l'esprit, — trouvent dans la *Revue générale des Sciences* le TABLEAU COMPLET DU MOUVEMENT SCIENTIFIQUE ACTUEL.

Voici un aperçu des principaux sujets récemment traités dans la *Revue :*

PRINCIPAUX SUJETS

RÉCEMMENT TRAITÉS DANS LA REVUE

Ces sujets sont relatifs : 1° à la *Science pure ;* 2° à l'*Industrie ;* 3° à l'*Agronomie ;* 4° à la *Géographie économique.*

I. — Science pure.

Les articles consacrés à ces sujets portent sur toutes les sciences ; ils insistent particulièrement sur celles où des tendances nouvelles se font jour ; et ils s'attachent à montrer, en chacune, l'orientation actuelle des recherches, les voies où les travaux en cours se trouvent engagés.

Les *Mathématiques* ne sont traitées que dans la mesure où il est possible de les exposer sans calculs. Dans ces sciences, ce sont les *idées*, et non pas les formules, que la *Revue* s'applique à indiquer.

En *Physique*, ce sont les faits d'observation et d'expérience conduisant à des conceptions nouvelles, qui ont naturellement la plus large part. L'*Optique* et l'*Electricité*, dont les théories se trouvent comme renouvelées à la suite des travaux de Hertz, de Lénard et de Rœntgen, notamment l'Electricité, si féconde en applications de toutes sortes, sont, dans la *Revue*, l'objet de nombreuses études. Il n'est guère de livraison de ce recueil qui ne leur consacre, sinon un article développé, tout au moins quelques notices très substantielles.

Une autre branche de la Physique, qui a pris, dans notre société, une importance exceptionnelle, la *Photographie*, est aussi, comme il convient, largement repré-

sentée. De nombreux articles dus aux spécialistes les plus éminents lui sont régulièrement consacrés.

La *Chimie physique*, science toute d'actualité ; la *Chimie minérale*, à laquelle semblent revenir beaucoup de chercheurs ; la *Chimie organique*, dont le domaine ne cesse de s'étendre ; la *Chimie physiologique*, si utile au biologiste et au médecin, occupent, dans la *Revue*, la grande place à laquelle l'intérêt philosophique de leurs doctrines et l'importance de leurs applications leur donnent droit.

La *Géologie*, actuellement en pleine évolution, les sciences biologiques, la *Physiologie* des plantes, des Animaux et de l'Homme, la *Médecine* et l'*Hygiène*, objets de tant de progrès, voient toutes leurs doctrines, toutes leurs conquêtes soigneusement exposées dans la *Revue générale des Sciences*.

Sous l'influence des travaux de laboratoire, la Pathologie subit une véritable révolution. La *Revue* s'attache à bien marquer le caractère de cette métamorphose. Elle a soin de décrire toutes les nouveautés, toutes les découvertes qui se produisent dans le vaste champ des sciences médicales, qu'il s'agisse de *Médecine* ou de *Chirurgie*, de neuro-pathologie, de maladie organique ou d'infection virulente.

En *Hygiène*, les questions à l'ordre du jour relatives à l'hygiène infantile, à l'étiologie des maladies épidémiques ou endémiques, aux mesures préventives destinées à combattre ces fléaux, sont décrites en détail. La *Revue* expose aussi les conventions internationales, les grandes entreprises publiques, les travaux d'amenée d'eau et d'assainissement dont se préoccupent les Gouvernements, les grandes agglomérations urbaines, les autorités régionales et locales.

Voici, à titre de **spécimens**, quelques-uns des articles que la *Revue* a récemment consacrés à ces questions :

Les programmes de l'École polytechnique	**M. A. Cornu** de l'Académie des Sciences.
Les bactéries fossiles et leur œuvre géologique	**M. Bernard Renault** Assistant au Muséum.
Le laboratoire cryogène de Leyde.	**M. Emile Mathias** Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse.
La fluoroscopie	**M. M.-C. Gariel** Professeur de Physique à la Faculté de Médecine de Paris.
Une nouvelle méthode de thérapeutique : l'Opothérapie	**Dr P. Maubrac** **Dr G. Maurange**
La constante de la gravitation.	**M. C.-V. Boys** de la Société Royale de Londre
Remarques sur la loi de Newton.	**M. C.-E. Guillaume** Physicien au Bureau international des Poids et Mesures.
Le séro-diagnostic de la fièvre typhoïde	**M. M. Fontoynont** Interne des Hôpitaux.
Les Manifestations de la vie dérivent-elles toutes des forces matérielles	**M. A. Gauthier** Membre de l'Académie des Sciences et de l'Académie de Médecine.
Le régime de la Sardine	**M. Fabre-Domergue** Directeur du Laboratoire de zoologie maritime de Concarneau.
La structure des Balkans	**M. A. de Lapparent**
Les Rayons X	**M. W. Rœntgen** Professeur de Physique à l'Université de Wurtzbourg.
Les Rayons Cathodiques et les Rayons Rœntgen	**M. H. Poincaré** de l'Académie des Sciences.
La Technique et les récentes applications de la Photographie de l'Invisible	**M. C. Raveau** Chef des travaux du Laboratoi de Physique à la Sorbonne. **M. G. Meslin** Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Montpellier.
L'État actuel de la lutte contre la Tuberculose	**M. L.-H. Petit** Secrétaire général de l'Œuvr de la Tuberculose.

De l'Infini mathématique.	**M. J. Tannery** Sous-Directeur des Études à l'École Normale Supérieure.
La détermination du Sexe.	**M. L. Cuénot** Chargé de cours de Zoologie à la Faculté des Sciences de Nancy.
L'École Polytechnique fédérale de Zurich.	**M. C.-E. Guye** Professeur agrégé à l'École Polytechnique fédérale de Zürich.
L'état actuel de nos connaissances sur les Venins	**M. C. Phisalix** Assistant au Muséum.
Les différentes formes de la Respiration humaine.	**M. W. Marcet** de la Société Royale de Londres.
Les récentes découvertes sur la Fonction thyroïdienne.	**Dr Allyre-Chassevant** Professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris.
Le Mécanisme de la complication organique chez les animaux.	**M. E. Perrier** de l'Académie des Sciences, Professeur au Muséum.
Les Infections non bactériennes.	**Dr H. Roger** Professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris.
La nouvelle Tuberculine de Koch et la théorie des Sucs plasmatiques de Buchner.	**Dr R. Romme** Préparateur à la Faculté de Médecine.
L'Histopathologie de la cellule nerveuse.	**Dr G. Marinesco**
La Désinfection des locaux . . .	**M. M. Molinié**

Indépendamment de ces études qui se succèdent, dans la *Revue*, selon les exigences de l'actualité, ses livraisons du 30 de chaque mois renferment chacune un grand article consacré à la revision des récents progrès d'une science particulière. Exemples :

1. Revision annuelle des progrès de l'Astronomie	**M. O. Callandreau** Membre de l'Académie des Sciences, Astronome à l'Observatoire de Paris. **M. G. Bigourdan** Astronome à l'Observatoire de Paris.

2. Revision annuelle des progrès de la Physique . . . . — **M. L. Poincaré**, Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris.

3. Revision annuelle des progrès de la Chimie pure . . . . — **M. A. Etard**, Répétiteur de Chimie à l'École Polytechnique.

4. Revision annuelle des progrès de la Géologie . . . . — **M. Emile Haug**, Chef des Travaux de Géologie à la Faculté des Sciences de Paris.

5. Revision annuelle des progrès de la Botanique. . . . . — **M. L. Mangin**, Professeur au Lycée Louis-le-Grand.

6. Revision annuelle des progrès de la Zoologie . . . . — **M. R. Kœhler**, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

7. Revision annuelle des progrès de l'Anatomie. . . . . — **M. H. Beauregard**, Assistant au Muséum.

8. Revision annuelle des progrès de l'Hygiène. . . . . — **M. P. Langlois**, Chef des Travaux de Physiologie à la Faculté de Médecine de Paris. **M. L. Olivier**, Docteur ès sciences.

9. Revision annuelle des progrès de la Chirurgie . . . . — **M. H. Hartmann**, Professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris. Chirurgien des Hôpitaux.

10. Revision annuelle des progrès de la Médecine. . . . . — **M. A. Létienne**

Ces grandes études résument avec le plus grand soin les acquisitions des diverses sciences, en précisent l'état actuel, et permettent d'apprécier, en chacune, le sens et l'importance du progrès.

II. — Industrie.

Dans presque toutes ses livraisons la *Revue* consacre une étude à une récente application de la science soit à la *Mécanique*, soit à l'*Art de l'Ingénieur*, soit à la *Métallurgie*, soit à quelqu'une de nos *grandes industries chimiques*.

Voici plusieurs **spécimens** de ces articles :

1. Les récents progrès de la Construction navale aux Etats-Unis.	**M. Croneau.** Professeur à l'Ecole d'Application du Génie maritime.
2. Appareils pour l'examen microscopique des corps opaques. . .	**M. G. Charpy** Docteur ès sciences.
3. L'Usine Krupp. — Les Établissements Armstrong	**Colonel XXX**
4. Le Travailleur sous-marin	**M. G. Pesce** Ingénieur des Arts et Manufactures.
5. La surchauffe de la Vapeur dans l'Industrie.	**M. Aimé Witz** Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.
6. La fabrication des Extraits tannants	**M. Ferdinand Jean** Ancien chimiste de la Bourse du Commerce.
7. Les récents progrès de la Fermentation alcoolique industrielle.	**M. Lucien Lévy** Professeur à l'Ecole des Industries agricoles de Douai.
8. L'Analyse commerciale des matières soumises a l'impôt	**M. F. Dupont** Secrétaire général de l'Association des Chimistes de Sucrerie.
9. Un nouveau système de Traction électrique : le Tramway Claret-Wuilleumier	**M. P. Lauriol** Ingénieur des ponts et chaussées.
10. L'application des Courants triphasés dans les Sucreries et les Raffineries.	**M. D. Korda** Ingénieur de la Compagnie de Fives-Lille.
11. La loi de variation de la Force électromotrice appliquée a un Alternateur en influence-t-elle le rendement ?	**M. A. Gay** Ancien élève de l'Ecole Polytechnique.
12. L'Électrodialyse des jus sucrés.	**M. E. Urbain** Chimiste des Sucreries D. Linard
13. Les récents perfectionnements du Phonographe	**M. G. Lavergne** Ingénieur civil des Mines.
14. L'Electro-Chimie de l'Aluminium et des Carbures métalliques. .	**M. D. Korda** Ingénieur de la Compagnie de Fives-Lille.

15. La Stérilisation de l'Eau par l'Ozone	Dr J. Répin Attaché à l'Institut Pasteur.
16. Relations entre les propriétés mécaniques des fers et des aciers et leur composition chimique	M. E. Demenge Ingénieur civil des Ponts et Chaussées.
17. L'État actuel de la production industrielle et de l'utilisation pratique de l'acétylène.	M. F. Dommer Professeur à l'École de Physique et de Chimie de la Ville de Paris.
18. Sur quelques progrès de la Photographie pratique.	M. E. Silz

Il convient aussi d'appeler l'attention sur une autre classe d'articles industriels, dont la *Revue* a conçu le programme et dont elle poursuit, depuis un an, la publication régulière. Nous voulons parler des MONOGRAPHIES qu'elle consacre à l'ÉTAT ACTUEL DES GRANDES INDUSTRIES.

Chaque grande industrie [1] est, dans la *Revue*, l'objet d'une monographie détaillée, due à un CHIMISTE, à un INGÉNIEUR notoirement compétent, ou à un MANUFACTURIER ayant conquis, dans la défense des intérêts *généraux* de l'industrie qu'il exerce, une éclatante autorité.

Ces monographies industrielles s'attachent à bien mettre en évidence dans chaque cas :

1° *L'application des méthodes scientifiques au perfectionnement des procédés de fabrication* ;

2° Le *régime économique*, notamment les résultats des dernières lois de douane ;

3° Les *conditions sociales du travail*.

Ces grands articles indiquent, pour chaque industrie. les conditions dans lesquelles elle s'est développée.

[1] C'est à dessein que nous disons « une industrie » et non pas un établissement industriel, une usine. La *Revue* ne consacre JAMAIS un article à la description d'une manufacture, entreprise privée d'un industriel ou d'une compagnie. Elle traite, ce qui est bien différent, de chaque industrie, considérée *dans son ensemble*.

les causes de son essor, son état actuel, l'outillage qu'elle exige, le détail des opérations qu'elle requiert, la façon dont la science y intervient, les problèmes que celle-ci a successivement résolus et ceux dont on doit lui demander la solution. On y trouve aussi, très soigneusement exposé, avec *cartes et diagrammes* à l'appui, tout ce qui concerne la répartition et l'expansion géographique de l'industrie considérée, ses débouchés, son importance comme élément de la richesse publique, ses statistiques, les cours de ses matières premières et de ses produits, les fluctuations de sa prospérité en rapport avec les régimes économiques qui lui ont été imposés, ses besoins actuels, les dispositions législatives qu'elle réclame, l'aide que ses syndicats lui apportent, la façon dont le travail manuel y est organisé et rémunéré, les dispositions prises pour ou par les ouvriers en vue d'assurer leur bien-être, enfin la comparaison de l'état de la même industrie en France et à l'Étranger.

Ces grandes monographies permettent au lecteur de se faire une idée exacte des FORCES INDUSTRIELLES de notre pays ; elles fournissent à l'*Économiste* et au *Législateur* des éléments d'appréciation qui leur font défaut aujourd'hui et devraient cependant être à la base de tous leurs travaux ; elles appellent l'attention du *Savant* sur les questions techniques qui sollicitent son concours ; elles donnent au *Praticien* la vue élevée des choses de son métier, au *Commerçant*, au *Financier*, à l'*Administrateur* les moyens d'apprécier sainement la valeur des entreprises qui les intéressent.

Voici les sujets traités dans les diverses monographies industrielles déjà parues dans la *Revue :*

L'ÉTAT ACTUEL DE L'INDUSTRIE SUCRIÈRE EN FRANCE	**M. E. Urbain** Chimiste de Sucrerie. **M. L. Lindet** Professeur de Technologie à l'Institut Agronomique.

L'état actuel de l'Industrie des Chaux hydrauliques et des Ciments en France	**M. E. Candlot.**
L'état actuel de l'Industrie de l'Acide sulfurique	**M. E. Sorel** Professeur suppléant au Conservatoire des Arts et Métiers
L'état actuel du Travail du Fer et de l'Acier	**M. E. Demenge** Ingénieur civil.
L'état actuel de l'Industrie des Phosphates et Superphosphates en France.	**M. E. Sorel** Professeur suppléant au Conservatoire des Arts et Métiers
L'état actuel de la Verrerie et de la Cristallerie en France	**M. E. Damour** Ancien Ingénieur de la Verrerie de Folembray. **M. G. Guéroult** Ancien Sous-Directeur des Cristalleries de Baccara
L'état actuel de l'Industrie des Eaux-de-Vie et Liqueurs en France.	**M. X. Rocques** Ancien Chimiste principal du Laboratoire municipal de Paris.
L'état actuel de la Fabrication de la Fonte en France	**M. A. Pourcel** Ancien chef de Service des Hauts Fourneaux et Aciéries de Terrenoire.
L'état actuel de la Navigation intérieure en France	**M. A. de Bovet** Directeur de la Compagnie de Touage de la Basse-Seine et de l'Oise.
L'état actuel de la Féculerie en France.	**M. L. Laze** Ingénieur-chimiste.
L'État actuel de la fabrication de l'Ammoniaque	**M. P. Truchot** Ingénieur-chimiste.
L'État actuel de la construction des Torpilles et Torpilleurs. . .	**M. H. Brillié** Ingénieur des Constructions navales.

III. — Agronomie.

Les applications des Sciences à l'Agriculture sont exposées dans la *Revue* par les agronomes les plus éminents de notre pays.

Tous les ans M. P.-P. Dehérain, de l'Académie des Sciences, professeur au Muséum et à l'École nationale d'Agriculture de Grignon, traite, en un grand article, des progrès agronomiques accomplis depuis un an. Mais, toute l'année, à mesure que se produisent d'intéressantes nouveautés, divers spécialistes les font connaître aux lecteurs. Ceux-ci se trouvent ainsi constamment tenus au courant du mouvement agronomique actuel, comme le montrent les articles suivants récemment parus :

1. La lutte actuelle contre le Black Rot.	**M. D. Zolla** Professeur à l'Ecole d'Agriculture de Grignon.
2. Les Cartes agronomiques communales	**M. A. Carnot** Membre de l'Académie des Sciences, Inspecteur en chef des Mines.
3. La Laiterie moderne et l'Industrie du Lait concentré	**M. R. Lezé** Professeur à l'Ecole d'Agriculture de Grignon.
4. Le dosage de l'Azote dans les terres et les engrais.	**M. A. Larbalétrier** Professeur à l'Ecole d'Agriculture du Pas-de-Calais.
5. Les Moteurs a Pétrole en Agriculture	**M. A. Gay** Ancien élève de l'Ecole Polytechnique.

Comme pour nos industries, la *Revue* a voulu aussi consacrer à chacune de nos grandes cultures une monographie particulière.

Voici quelques exemples de ces monographies agricoles :

L'État actuel de la Culture des Plantes ornementales en Algérie. . . .	**M. H. Rivière** Directeur du Jardin d'Essai du Hamma, à Alger.
L'État actuel de la culture des plantes oléagineuses herbacées.	**M. L. Malpeaux** Professeur à l'École d'Agriculture du Pas-de-Calais.
L'État actuel de l'Apiculture en France.	**M. R. Hommel** Professeur spécial d'Agriculture du Puy-de-Dô-

L'état actuel de l'Aviculture en France.	**M. C. Voitellier** Professeur départemental d'Agriculture à Meaux.
L'état actuel de la Vinification en France.	**M. L. Roos** Directeur de la Station Œnologique de l'Hérault.
L'état actuel de la Vinification en Algérie	**M. J. Dugast** Directeur de la Station Agronomique d'Alger.
L'état actuel de la Culture de l'Orge de brasserie et du Houblon en France.	**M. A. Larbalétrier** Professeur à l'Ecole d'Agriculture du Pas-de-Calais.

IV. — Géographie économique.

La *Revue* s'applique, enfin, à faire connaître le progrès de l'exploration et de la colonisation, l'état actuel de nos possessions et des pays soumis à notre Protectorat. Sur ces sujets elle a notamment publié :

La Colonisation libre en Nouvelle-Calédonie	**M. J. Godefroy**
La France dans le détroit de Bab-el-Mandeb.	**M. J. Machat**
Le Congo français	**M. J. Deloncle** Sous-Directeur au Ministère des Colonies.
Les Produits végétaux du Congo français	**M. L. Lecomte** Explorateur au Congo.
La Géologie et les Mines du bassin du Niari	**M. M. Bertrand** Professeur de Géologie à l'École Supérieure des Mines.
Création d'une Voie de communication du Stanley-Pool a la Mer.	**M. A. Cornille** Capitaine du Génie. **M. J. Goudard** Capitaine du Génie.
Le port de Sfax. — Le mouvement colonial en Allemagne.	**M. J. Godefroy**
Les Relations commerciales de l'Égypte avec le Soudan.	**M. H. Dehérain**

…s Hovas de Madagascar.	**M. A. Grandidier** Membre de l'Institut.
…État du commerce a Madagascar et l'avenir économique de l'ile. . . .	**M. G. Foucart** Chargé de missions à Madagascar.

Spécialement sur la Tunisie, la *Revue* a publié :

La Nature Tunisienne.	**M. Marcel Dubois** Professeur de Géographie coloniale à la Sorbonne.
Les grandes Étapes de la Civilisation en Tunisie.	**M. G. Boissier** Secrétaire perpétuel de l'Académie française.
Les grands Travaux d'Art et les Aménagements agricoles des Romains en Tunisie.	**M. F. Gauckler** Directeur du Service des Antiquités et des Arts de la Régence de Tunis
La Population et les Races en Tunisie	**M. J. Bertholon** Médecin à Tunis.
L'aspect de la Civilisation indigène actuelle en Tunisie. . . .	**M. G. Deschamps** Ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Ecole d'Athènes.
Les conditions sanitaires et l'hygiène en Tunisie	**M. A. Loir** Directeur de l'Institut Pasteur de Tunis.
La Géologie, les Carrières et les Mines en Tunisie	**M. E. Haug** Chef des Travaux pratiques de Géologie à la Sorbonne. **M. R. Cagnat** Professeur au Collège de France. Membre de l'Institut. **M. E. de Fages** Ingénieur des ponts et chaussées de la Régence.
Les Forêts et la question du reboisement en Tunisie.	**M. G. Loth** Professeur au Lycée Carnot à Tunis.
L'Acclimatation végétale en Tunisie	**M. M. Cornu** Professeur au Muséum.
L'Agriculture en Tunisie	**M. L. Grandeau** Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Nancy.

11. La culture de l'Olivier en Tunisie	**M. de Lespinasse-Langeac** Président de la Chambre mixte de Commerce et d'Agriculture du Sud de la Tunisie.
12. Les conditions économiques et sociales de la colonisation agricole en Tunisie	**M. J. Chailley-Bert** Secrétaire général de l'Union Coloniale française
13. Les Industries des Indigènes en Tunisie	**M. J. Fleury** Chef de Bureau de S. M. le Bey
14. Les Industries des Européens en Tunisie	**M. Robert** Vice-Président de la Chambre mixte de Commerce et d'Agriculture du Sud de la Tunisie. **M. X. Rocques** Chimiste-conseil du Domaine de Potinville. **M. J. Deiss** Membre de la Chambre de Commerce de Marseille.
15. Les rapports de la Tunisie avec le marché européen	**M. G. Wolfrom** Attaché à la Résidence générale, à Tunis.
16. Les relations commerciales de la Tunisie avec le Sahara et le Soudan	**M. le Lt-Cl Rébillet** Chef de la Maison militaire de M. le Résident général, à Tunis.
17. Les Travaux publics de la Régence.	**M. E. de Fages** Ingénieur des ponts et chaussées de la Régence.
18. L'État actuel des Services scientifiques et de l'Instruction publique en Tunisie.	**M. R. Versini** Professeur au Lycée d'Aix.
19. La Statistique de la Tunisie. . .	**M. V. Turquan** Directeur de la Statistique au Ministère du Commerce
20. L'Œuvre administrative de la France en Tunisie	**M. E. Levasseur** Membre de l'Académie des Sciences morales et politiques

APPRÉCIATIONS DE LA PRESSE

SUR LA « REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES »

Les articles de la *Revue*, — précisément parce qu'ils apportent des *arguments et des faits d'ordre scientifique* à la discussion des questions d'intérêt général, — sont souvent cités au cours des débats parlementaires ; les feuilles politiques leur font de fréquents emprunts et ont ainsi l'occasion de leur rendre hommage.

Nous ne rapporterons pas ici les appréciations élogieuses que les grands journaux de Paris (*le Temps, les Débats, le Gaulois, le Figaro, le Monde*, etc...), des Départements (plus de 300), et de l'Etranger (*Times*, plus de 200 périodiques, etc...), — ont, en bien des circonstances, émises sur la *Revue*. Contentons-nous de reproduire l'article suivant, dans lequel le *Journal des Débats* juge ainsi l'œuvre de la *Revue générale des Sciences* :

« La science a cessé d'être le domaine de quelques-uns. Elle pénètre notre existence, et nul homme du monde ne peut s'affranchir de la nécessité de se tenir au courant de ses découvertes et de ses progrès.

« Aussi a-t-on vu se multiplier, en ces dernières années, les journaux dits « scientifiques ». Le nombre de ces feuilles démontre qu'un nouveau besoin est né dans l'esprit public, qu'une curiosité s'est ouverte à ce qui, naguère encore, paraissait un mystère interdit à la foule.

« Il s'en faut, cependant, que toutes ces publications méritent créance. La plupart n'ont de scientifique que le nom. Comme si elles avaient peur d'effrayer leurs lecteurs en les initiant vraiment à la science, elles croient faire assez en leur donnant chaque

semaine, à côté de vagues dissertations sans conclusion, quelques recettes d'hygiène, de photographie, d'électricité usuelle, ou encore des statistiques incohérentes ayant une fois pour objet le nombre de kilomètres parcourus en un jour par tous les vélocipédistes du monde entier, une autre fois la quantité de becs de gaz par groupe de dix mille habitants dans les principales villes de l'Europe.

« Une seule revue a, depuis six ans, trouvé le moyen de rester constamment scientifique, dans le sens le plus élevé du terme, tout en se maintenant pratique et accessible à tous les esprits cultivés : c'est la *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, couramment appelée la « *Revue Verte* ».

« Le domaine de cette Revue est des plus vastes : c'est, en réalité, celui de la science tout entière, méthodiquement étudiée et considérée depuis ses principes jusqu'au détail de ses applications.

« Un tel programme n'est réalisable qu'avec une direction sans cesse en éveil et bien consciente de son rôle. Il ne faut pas croire, en effet, que, pour faire une Revue, il suffise d'imprimer bout à bout des articles, mêmes savants, recueillis au hasard des rencontres. Il faut choisir, dans chaque département de la Science, les sujets à traiter et, pour chacun d'eux, l'écrivain le plus autorisé. Il faut, en outre, combiner ces articles de telle sorte que, dans chaque Science, leur ensemble donne au lecteur le tableau complet des progrès récents, l'exacte mise au point des questions à l'ordre du jour.

« Or, dans la *Revue générale des Sciences*, — et c'est là un trait qui la distingue entre toutes, — ce souci de la méthode et de l'équilibre se sent à chaque page. L'étendue de chaque article est proportionnée à l'importance et à l'actualité du sujet ; et, quelle que soit la question traitée, elle est toujours exposée par un spécialiste hautement compétent.

« Aussi ce recueil est-il devenu, non seulement en France, mais dans le monde, le trait d'union des savants et du public. Chaque fois qu'ils ont une découverte à exposer, une communication d'intérêt général à présenter, c'est à la *Revue Verte* que recourent les maîtres de la science : les Bouchard, Lippmann, Milne-Edwards, Grandidier, Cornu, Marey, Poincaré, Bertrand, Berthelot, Dehérain, Janssen, Crookes, Ramsay, Ostwald, Rœntgen, etc., etc.

« A côté des articles de ces savants, — qui tiennent ses lecteurs

au courant de tous les faits d'ordre scientifique qu'un homme instruit doit connaître, — la *Revue* fait large part aux préoccupations pratiques de la société moderne. C'est ainsi qu'elle accorde un développement particulier aux questions agronomiques, industrielles et coloniales.

« Il serait superflu de rappeler, à ce propos, l'importance de l'enquête qu'elle a instituée pour faire connaître l'état actuel et les besoins de nos grandes industries urbaines et rurales. Ses monographies agricoles et industrielles ne sont pas seulement précieuses aux praticiens : elles attirent actuellement l'attention de tous ceux qui se préoccupent des destinées de notre pays.

« C'est pour répondre à la même patriotique curiosité que la *Revue* a entrepris de faire paraître une série d'articles sur la géographie, les ressources minérales, forestières, culturales et commerciales de nos possessions d'outre-mer. On sait, notamment, avec quelle faveur a été accueillie, dans le monde entier la livraison de la *Revue* consacrée à « *Ce qu'il faut connaître de Madagascar* ».

« Cette riche variété d'études, savamment associées, de façon à tenir le public au courant de tout le mouvement scientifique contemporain, a concilié à la *Revue générale des Sciences* les sympathies du public instruit ; et c'est un signe heureux que, dans notre démocratie, un recueil de haute science obtienne le succès en intervenant aussi directement dans les affaires de notre pays. »

(Extrait du *Journal des Débats* du 4 mars 1896.)

Quatrième année.

L'ÉCLAIRAGE ÉLECTRIQUE

REVUE HEBDOMADAIRE D'ÉLECTRICITÉ

PARAISSANT LE SAMEDI

ABONNEMENTS

FRANCE et ALGÉRIE : **50** francs. — UNION POSTALE : **60** francs

Les abonnements partent du commencement de chaque trimestre.

Prix du Numéro : 1 franc

Lorsqu'en septembre 1894 *La Lumière Électrique* cessa brusquement de paraître, l'émoi fut grand parmi tous ceux, savants et industriels, qui s'occupent d'électricité. C'était, en effet, un recueil universellement apprécié, dont la collection constitue aujourd'hui une sorte d'encyclopédie de la Science électrique et de ses applications, où tous les faits nouveaux, toutes les découvertes récentes se trouvent consignés et étudiés avec les développements qu'ils comportent.

Combler le vide laissé dans la Presse scientifique par la disparition de cet important organe s'imposait. C'est dans ce but que, groupant les principaux collaborateurs de ce recueil et y adjoignant des éléments nouveaux en vue d'accentuer son double caractère industriel et scientifique, **L'Éclairage Électrique** a été fondé. Publié sous le même format, avec la même périodicité, aussi

largement illustré que *La Lumière Électrique*, **L'Éclairage Électrique**, qui paraît régulièrement depuis le 15 septembre 1894, a su conserver, et même, suivant d'aucuns, dépasser le rang qu'avait atteint son prédécesseur.

COMPOSITION DE CHAQUE NUMÉRO

Chaque numéro comprend cinq parties :

1° *Articles de fond.*

2° *Revue industrielle et des inventions.*

3° *Revue des Sociétés savantes et des publications scientifiques.*

4° *Bibliographie.*

5° *Chronique.*

Depuis quelques mois il a été ajouté à chaque numéro un SUPPLÉMENT où sont publiés les :

6° *Nouvelles.*

7° *Sommaires des périodiques.*

8° *Ouvrages reçus.*

9° *Brevets d'invention.*

I. Articles de fond. — Les articles de fond, généralement au nombre de quatre, se composent d'*articles originaux, de revues critiques et de descriptions d'usines, d'installations et de matériel.*

Les *articles originaux*, dus à la plume des savants les plus illustres et des ingénieurs les plus distingués, sont de beaucoup les plus nombreux et les plus développés. Les questions les plus complexes de l'électricité pure, aussi bien que les problèmes les plus ardus de l'art de l'ingénieur électricien y sont traités avec ampleur ; en outre, une place est accordée aux questions qui, sans être absolument du domaine de l'électricité, comme celles de l'optique et, dans un autre ordre d'idées, les questions relatives aux moteurs

hydrauliques et thermiques, s'y rattachent assez étroitement pour présenter quelque intérêt aux savants et aux industriels.

Les *revues critiques* ont pour objet de remettre sous les yeux du lecteur, à l'occasion de quelque nouvelle découverte, l'ensemble des travaux effectués dans une des parties du domaine si vaste de l'électricité ; toujours confiées à un savant ou à un praticien au courant de la question, ces revues ont pour le lecteur l'inappréciable avantage de le dispenser d'aller chercher dans d'innombrables publications les mémoires originaux qui l'intéressent.

Les *descriptions d'usines, d'installations et de matériel*, généralement faites par les ingénieurs chargés de leur exécution ou en mesure de les étudier avec soin, sont toujours illustrées avec la plus grande profusion.

II. Revue industrielle et des inventions. — Dans cette seconde partie, *L'Éclairage Électrique* donne l'analyse des principaux articles publiés dans les *journaux français et étrangers*, des communications faites aux *Sociétés techniques* et des *Brevets d'invention*. Ces analyses, faites avec le plus grand soin et le plus rapidement possible, tiennent chaque semaine les ingénieurs au courant des questions qui les intéressent.

III. Revue des Sociétés savantes et de la presse scientifique. — Cette troisième partie rend aux savants les mêmes services que la précédente aux industriels ; elle est consacrée à l'analyse détaillée des mémoires présentés aux diverses *Académies et Sociétés savantes* ou publiés dans les principaux *Recueils scientifiques* du monde entier. Grâce à la compétence des collaborateurs qui en sont chargés, grâce aussi au soin et à la scrupuleuse exactitude qu'ils apportent au travail délicat qui consiste à résumer la pensée des autres sans la défigurer, cette *Revue* jouit d'une estime universelle et

tout auteur d'un travail sérieux tient à honneur d'y figurer.

IV. Bibliographie. — Tout ouvrage important publié en France ou à l'étranger et se rapportant à l'électricité est l'objet d'une analyse critique absolument impartiale, assez étendue pour indiquer au lecteur la valeur de l'ouvrage et la nature de son contenu.

V. Chronique. — Dans cette partie, sont donnés des renseignements sur le développement des applications de l'électricité : *travaux projetés*, *installations d'usines récentes*, *résultats d'exploitation*, *statistique*, etc., ainsi que des analyses succinctes des travaux industriels et scientifiques de nature à pouvoir être exposés sans illustration.

Supplément. — Dans les *Nouvelles* sont publiées aussi rapidement que possible les informations relatives à la traction, l'éclairage, la téléphonie, etc., aux expositions, concours, formations de sociétés, etc.

Les *Sommaires des périodiques* donnent chaque semaine et dans le plus bref délai, les titres des articles originaux publiés dans les principaux journaux d'électricité allemands, américains, anglais, autrichiens, etc., ainsi que des articles relatifs à l'électricité que publient les journaux et revues industriels ou scientifiques d'ordre plus général.

Les ouvrages envoyés à la Rédaction sont annoncés, sous la rubrique *Ouvrages reçus*, dès leur réception, de sorte que les lecteurs de *L'Éclairage Électrique* se trouvent ainsi constamment tenus au courant de la littérature électrique.

Enfin chaque semaine une liste des *Brevets d'invention* pris récemment en France, termine le supplément.

Cette division du journal et le développement qu'il est possible de donner à chacune de ses parties grâce à

l'étendue de chaque numéro permettent de renseigner le lecteur, *rapidement et complètement*, sur tout ce qui s'écrit ou se fait en électricité, dans le monde entier.

PRINCIPAUX SUJETS RÉCEMMENT TRAITÉS

S'adressant aux savants, aux ingénieurs et aux constructeurs, *L'Éclairage Électrique* traite des sujets des plus variés se rapportant à *l'Électricité pure* et aux nombreuses *Applications de l'électricité.*

I. — Électricité pure.

Bien que toutes les questions d'électricité pure soient traitées avec ampleur dans la *Revue des Sociétés savantes et des publications scientifiques* où sont reproduits ou analysés les travaux présentés aux Académies des sciences et aux Sociétés de physique de Paris, Londres, Berlin, Vienne, Rome, Saint-Pétersbourg, et les mémoires publiés par les grandes revues scientifiques : *Annales de Chimie et de Physique, Journal de Physique, Annalen der Physik und Chemie, Philosophical Magazine, Physical Review*, chaque livraison de **L'Éclairage Électrique** contient généralement un article de fond sur *l'Électricité pure.*

Voici à titre de spécimens quelques-uns des articles de ce genre récemment publiés :

A propos de la Théorie de Larmor.	**M. H. Poincaré** De l'Académie des Sciences, Professeur à la Sorbonne.
La décimalisation de l'heure et de la circonférence	**M. A. Cornu** De l'Académie des Sciences, Professeur à l'École Polytechnique.
Recherches expérimentales sur la polarisation rotatoire magnétique.	**M. Cotton** Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.
La Théorie électromagnétique de la lumière et l'absorption cristalline.	**M. B. Bruhnes** Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes. Sur l'équivalence des flux de conduction et de déplacement	**M. Duhem**, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
Au sujet des expériences de M. [illegible]	**M. H. Pellat**, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
Potentiels [illegible] dans les liquides en [illegible]	**M. Gouré de Villemontée**, [illegible] Professeur au lycée Buffon.
Sur la loi de l'[illegible]	**M. [illegible] Guilbert**, Ingénieur [illegible] de la maison [illegible].
Sur l'hystérésis [illegible] queuse	**M. [illegible]**, Professeur [illegible]
La viscosité [illegible] ques	**M. A. Hess**
Théorie de [illegible] quement [illegible] sonnement	**M. A. Vaschy**, Ingénieur [illegible]
Recherches [illegible]	**M. Pierre Weiss**, Maître de conférences à la Faculté des sciences de Rennes.
Nouvelles [illegible] globulaire	**M. A. Righi**, [illegible]

Les [illegible] large [illegible] *L'Éclairage Électrique* [illegible] *rayons* [illegible] nombre [illegible] qu'un [illegible] sur les [illegible] men. [illegible] articles [illegible]

Les [illegible]	**M. [illegible]** [illegible]
Sur les [illegible]	**M. A. [illegible]** [illegible]
Les [illegible] thes	**M. [illegible]** [illegible]

Sur les rayons de Lenard et de Rœntgen.	M. Olivier Lodge De la Société Royale de Londres.
La photographie a la lumière noire.	M. G. Le Bon
Nouvelles propriétés des rayons X.	L. Benoist et D. Hurmuzescu Docteurs ès sciences.
Expériences sur les rayons de Rœntgen	M. A. Nodon Docteur ès sciences.
Transparence des métaux pour les rayons X.	M. V. Chabaud
De la photographie des objets métalliques a travers les corps opaques au moyen d'une aigrette d'une bobine d'induction.	M. G. Moreau
Les hypothèses actuelles sur la nature des rayons de Rœntgen	M. O. Lodge De la Société Royale de Londres.
Les rayons de Rœntgen a la Société française de physique.	M. J. Blondin Agrégé de l'Université.

Ces questions ont d'ailleurs été suivies et laissa de côté les nombreuses *Revues* et *Chroniques* qui s rapportent, nous citerons parmi les *Articles de fon*

Sur la production de phénomènes électriques par les rayons de Rœntgen.	M. A. Righi Professeur à l'Universit de Bologne.
Recherches sur le vide élevé.	Lord Kelvin De la Société Royale de Londres.
A propos des expériences de Rœntgen.	M. Clavenad Ingénieur en chef des pon et chaussées.
Décharge de l'électricité produite par les rayons Rœntgen	M. J.-J. Thomson De la Société Royale de Londres.
Sur la production des ondes longitudinales dans l'éther	Lord Kelvin De la Société Royale de Londres.
La diffraction des rayons X	M. D. Bungetzian Professeur à l'Universi de Bucarest.
Sur une nouvelle espèce de rayons. .	M. W.-C. Rœntge Professeur à l'Universi de Wurzbourg.
Mécanisme de la décharge des corps électrisés par les rayons de Rœntgen.	M. Jean Perrin Agrégé préparateur à l'E normale.

Sur l'action photographique des rayons X.	**M. Ch. Maurain** Agrégé préparateur au Collège de France.
Perfectionnement a la construction des tubes de Crookes destinés a la photographie par les rayons de Rœntgen	**M. É. Colardeau** Agrégé de l'Université Professeur au Collège Rollin.
Les rayons cathodiques et la théorie de Jaumann	**M. H. Poincaré** De l'Académie des sciences.
Les rayons X et les illusions de pénombre.	**M. G. Sagnac** Agrégé préparateur à la Sorbonne.
Effets des rayons de Rœntgen sur la conductibilité électrique de la paraffine	**Lord Kelvin** **Dr Beattie** **Dr Smolan**

A la limite du domaine de l'*Électricité pure* se placent les analyses des travaux d'électricité présentés aux Congrès et les descriptions des appareils nouveaux rencontrés aux Expositions. Dans les derniers volumes de **L'Éclairage Électrique** ont paru sur ces sujets les articles qui suivent :

Congrès international des électriciens de Genève	**M. C.-E. Guye** Professeur à l'école polytechnique de Zurich. **M. J. Blondin** Agrégé de l'Université
Congrès de Carthage de l'Association française pour l'avancement des Sciences.	**M. A. Broca** Docteur ès sciences, Préparateur à la Faculté de Médecine de Paris.
Communications faites a la section des sciences médicales du Congrès de Bordeaux.	**Dr Th. Guilloz** De la Faculté des Sciences de Nancy.
Congrès de Chimie appliquée de Paris	**M. J. Blondin** Agrégé de l'Université, et **M. G. Pelissier**
Les travaux de l'Association britannique.	**M. A. Hess**
L'Exposition de Genève.	**M. Ch.-E. Guye** Professeur à l'École polytechnique de Zurich.
L'Exposition de la Société de physique.	**M. J. Blondin** Agrégé de l'Université.

II. — Électricité appliquée.

Plus nombreux encore sont les articles se rapportant aux applications de l'Électricité.

Brevets d'invention. — La description des *Brevets d'invention*, d'une si grande importance pour l'ingénieur et le constructeur, est régulièrement faite sous forme d'articles et de revues très largement illustrés. Parmi les articles nous relevons :

Les applications mécaniques. . . . . . Les applications thermiques . . . . . Les applications chimiques. . . . . . Les lampes a arc. . . . . Les lampes a incandescence.	**M. G. Richard** Ingénieur des Arts et Manufactures, Secrétaire général de la Société d'Encouragement.
Les applications a la traction. . . .	**M. G. Pellissier**
Les dynamos et les moteurs.	**M. F. Guilbert** Ingénieur de la maison Farcot.
La téléphonie et la télégraphie . .	**M. A. Hess**
Les applications chimiques.	**M. J. Blondin**
Les instruments de mesure.	**M. H. Armagnat** Ingénieur de la maison Carpentier.

Descriptions d'installation. — Mais s'il est de la plus grande utilité d'être tenu au courant des inventions récentes, il est non moins utile de connaître celles qui ont subi l'épreuve de la pratique. **L'Éclairage Électrique** publie, dans ce dernier but, la description détaillée des grandes *Installations*.

Voici quelques-uns des articles de ce genre publiés dans les derniers volumes :

La station centrale de Zurich	**M. Ch. Jacquin** Ingénieur des chemins de fer de l'Est.
La distribution d'énergie électrique a Lyon.	**M. J.-L. Routin** Ingénieur de la Société des forces motrice du Rhône.
Le transport de force Chèvres-Genève	**M. C.-E. Guye** Professeur agrégé à l'Ecole polytechnique de Zurich.

L'utilisation des chutes du Niagara	**M. G. Pellissier**
Les alternateurs du secteur des Champs-Élysées. Le nouveau matériel générateur du secteur de la Société d'Éclairage et de Force	**M. F. Guilbert** Ingénieur de la maison Farcot.
Le secteur de la rive gauche	**M. J. Reyval**
La station centrale de Buda-Pesth.	**M. A. Moutier** Ingénieur du chemin de fer du Nord.

Etudes industrielles. — Ces études forment la majeure partie des articles de fond. Toujours signées par les ingénieurs les plus distingués, elles se rapportent aux sujets les plus divers : Mesures industrielles, Génération et Transformation de l'électricité, Distribution, Moteurs, Transport de force, Éclairage, Électro-Chimie, etc., et contribuent à faire de **L'Éclairage Électrique** un journal indispensable à l'ingénieur-constructeur.

Voici quelques-uns des sujets récemment traités :

La théorie du transformateur général de M. Steinmets. Du rôle des condensateurs dans les induits des moteurs asynchrones	**M. T. Guilbert** Ingénieur de la maison Farcot.
Mesure directe de l'intensité lumineuse moyenne sphérique	**M. A. Blondel** Ingénieur des phares et balises, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées.
Nouveau système de distribution électrique de l'énergie par courants alternatifs	**M. Galileo Ferrari** Membre de l'Académie de Turin. **M. Riccardo Arno** Professeur au Musée Royal industriel de Milan.
Transformateur rotatif Schuckert a courants continus, monophasés, diphasés et triphasés	**M. J. Hanappe** Professeur au laboratoire électro-technique de Mons.
Les appareils de mesures électriques.	**M. H. Armagnat** Ingénieur de la maison Carpentier.

Décalage et étincelles dans les machines a courant continu.	M. Fischer Hinnen Ingénieur-Electricien de la maison Farcot.
Nouvelle méthode pour la détermination des rendements	M. J.-L. Routin Ingénieur de la Société des forces motrices du Rhô
Sur la difficulté de réaliser un cable téléphonique sous-marin. . .	M. E. Brylinski Ingénieur des Télégraphes
Sur l'emploi du secohmètre dans la mesure des coefficients de self-induction	M. Osc. Colard Ingénieur des télégraphes belges.
Sur la mesure de l'isolement en marche d'un réseau a trois fils a courant continu.	M. Maurice Travaill Ingénieur-Electricien de la ville de Bruxelles.
Le traitement électrochimique des minerais de Broken Hill.	M. E. Andrioli Chimiste-Electricien.

Parmi les applications de l'électricité, deux ont pı dans ces dernières années une extension considérabl nous voulons parler de la *Traction électrique* et l'*Électrochimie*.

La traction a été dans **L'Éclairage Électrique** l'ob de nombreux articles, revues et chroniques. Vo quelques-uns de ces articles :

Sur les moyens de diminuer les fuites de courant dans le sol, dues aux tramways électriques avec retour par les rails.	M. P. Lauriol Ingénieur des Ponts et Chaussées
La traction électrique par courants polyphasés a Lugano	M. J.-L. Routin Ingénieur de la Sociét des forces motrices du Rh
Le tramway de la place de la République a Romainville.	M. Ch. Jacquin Ingénieur des Chemins de fer de l'I
Distribution du courant de retour dans les tramways.	M. A. Blondel Ingénieur des phares et balises. Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaus
Tramways électriques : conditions d'établissement au point de vue des dangers électrolytiques pour les ouvrages placés sur ou sous les voies publiques	M. A. Monmerqu Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées

Le matériel de traction de la Compagnie de Fives-Lille.	**M. Paul Girault** Ingénieur de la Compagnie de Fives-Lille.
La corrosion électrolytique par le courant de retour des tramways.	**M. Dugald C. Jackson** Professeur à l'Université de Wisconsin.

Voici en outre un extrait de la table des matières d'un des derniers volumes trimestriels qui donnera une idée de la quantité de matières qui peut être publiée sur une seule question et dans un seul volume de *L'Éclairage Électrique.*

Traction électrique

A. Blondel. Distribution du courant de retour dans les tramways. — C. del Proposto. Sur le calcul des réseaux de tramways. — S.-L. Foster. Calcul de l'emplacement correct des fils à trôlet dans les courbes. — S.-L. Foster. La montée des rampes en tramway électrique. — Rapport du Dr Wietlisbach sur les perturbations téléphoniques dues à l'influence des courants industriels (Congrès de Genève). Discussion du rapport précédent. — G. Pellissier. Tramway électromagnétique Westinghouse. — Tyler. Tramway à conducteur de surface et courants alternatifs. — Edward Hopkinson et Siemens. Trôlets articulés à contact glissant. — Statistique d'exploitation des tramways électriques à conducteur en caniveau de Washington. — Statistique d'exploitation des tramways électriques en France. — Le réseau des tramways de Chicago. — Les quatre métropolitains électriques de Chicago. — La traction mécanique à Paris. — Le chemin de fer souterrain à Buda-Pest. — Les tramways à air comprimé en Amérique. — La traction électrique et la traction funiculaire. — Le gaz naturel et les tramways électriques. — Nouvelle bicyclette électrique. — Ch. Jacquin. La propulsion électrique dans les égouts de Paris. — Un nouveau bateau sous-marin.

La traction électrique à Albany, Berlin, Buda-Pest, Chicago, Elmira, Hartlepools, Le Caire, Los Angeles, New-York, Philadelphie, Pilsen, Stettin, Varèse.

La traction électrique à Alger, Bernay, Bordeaux, Cette, Douai, Ecully, Grenoble, Le Havre, Joyeuse, Marseille, Montpellier, Nantes, Nice, Poitiers, Vals-les-Bains.

Spécialement sur l'électrochimie, *L'Éclairage Électrique* a publié pendant le 3e trimestre 1896, les articles de revues qui suivent :

Electrochimie

J. Blondin et G. Pellissier. L'électrochimie au Congrès international de chimie appliquée. — A. Minet. Considérations générales sur les dernières applications de l'électrochimie. — Fabrication électrolytique

l'antimoine. — Electrolyse des sulfures métalliques Siemens. — Fabrication des plaques et fils de cuivre ou de zinc électrolytiques, procédé Copwer-Cooles. — Galvanisation Cowper-Cooles. — D. TOMMASSI. Procédé de désargentation électrolytique des plombs argentifères. — HENRI MOISSAN. Sur une nouvelle méthode de préparation des alliages d'aluminium. — CHARLES COMBES. Sur la préparation des alliages d'aluminium par voie de réaction chimique. — HENRI MOISSAN. Sur les produits du four électrique. — Sur le four électrique. — Etude du carbure de lanthane — Etude de la fonte et du carbure de vanadium. — Recherches sur le tungstène. — Sur la solubilité du carbone dans le rhodium, l'iridium et le palladium. — Sur quelques expériences nouvelles relatives à la préparation du diamant. — A. MOURLOT. Sur l'action d'une haute température sur quelques sulfures. — BULLIER. La préparation du carbure de calcium. — Fours électriques pour la fabrication du carbure de calcium. — Four à carbure de Spray. — Four à carbure de Niagara. — Four à carbure Bullier. — Préparation de l'acétylène, procédé Schneider. — CHASSEVANT. Sur un procédé permettant de régulariser le débit de l'acétylène, par l'action de l'eau sur le carbide. — Purification de l'acétylène, procédé R. Pictet. — GIRAUD. Résultats d'analyse de l'acétylène. — HUBOU. Les applications de l'acétylène. — G. PELLISSIER. L'éclairage à l'acétylène — DE BRÉVANS. L'éclairage à l'acétylène. — L'éclairage des trains par l'acétylène. — Les dangers de l'acétylène. — FÉRY. Sur la photométrie de l'acétylène. — Etalon photométrique à l'acétylène. — Générateur tubulaire sursurateur à ozone Seguy. — HULIN. Résultats pratiques obtenus dans l'électrolyse des chlorures. — Electrolyseur Peyrusson. — J. HAMONET. Sur l'électrolyse des acides gras. — BATTUT. L'épuration des jus sucrés par l'électrolyse. — A. BAUDRY. Epuration des jus sucrés par le procédé Schlomeyer, Behm et Dammeyer. — PEYRUSSON. L'emploi d'électrodes en plomb dans l'électrolyse des jus sucrés. — DUPONT. Quelques observations sur l'électrolyse des jus sucrés. — La fabrication du corindon en Amérique. — Station électrolytique à Skien (Norvège). — Station pour le traitement des minerais, à Trolhatan.

[illegible]

L'E[illegible] paraît [illegible] les samedis, par livraisons [illegible] pages [illegible] imprimées sur deux [illegible] lignes.

Chaque [illegible] forme [illegible] volumes trimestriels [illegible] pages chacun, accompagnés d'une table très [illegible] par matières et par noms d'auteurs, à la fin de chaque volume.

Imprimé avec le plus grand soin, sur beau papier et orné de figures très soignées, *L'Éclairage Électrique*, bien que le prix de l'abonnement [illegible] puisse paraître élevé (50 fr. pour la France [illegible] pour l'étranger), est la publication [illegible] la moins chère, étant donné l'abond[illegible] qu'on y trouve traitées et la [illegible] contient (près de 2000 pa[illegible]

Tout ce qui peut in[illegible] électricien y est sign[illegible] *Électrique* peut [illegible] de la science [illegible] qu'il suffit [illegible] toutes les [illegible] les nouv[illegible] en él[illegible] autre [illegible]

Deuxième année.

LES

ACTUALITÉS CHIMIQUES

REVUE DES PROGRÈS

DE LA

CHIMIE PURE ET APPLIQUÉE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

DE **M. CHARLES FRIEDEL**, DE L'INSTITUT

M. GEORGE-F. JAUBERT, docteur ès sciences
Rédacteur.

Paraissant tous les mois, par fascicules grand in-8° d'environ 32 pages

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL

France . . . . **15** fr. | Union postale. . . . **16** fr.
Prix du numéro : **1** fr. **50**

Les parties les plus nouvelles de la science, et partant celles qui sont les plus intéressantes ne pénètrent que peu à peu dans l'enseignement classique. Publiées, d'ailleurs, le plus souvent par fragments, elles exigent, pour être groupées, des recherches bibliographiques longues et pénibles.

Il était donc naturel de compléter l'enseignement de la chimie par des **conférences** dans lesquelles les auteurs de travaux marquants pussent faire connaître au public l'ensemble des résultats obtenus par eux, et les savants de bonne volonté faire profiter la science de leurs lectures et du travail de coordination auquel ils se sont livrés.

C'est la publication de ces conférences que nous offrons sous la forme d'une revue, dans laquelle les **Actualités chimiques**, relatives à la SCIENCE PURE comme aux APPLICATIONS INDUSTRIELLES, sont exposées par des savants compétents.

Les **Actualités chimiques** publient, à intervalles réguliers, des exposés généraux des progrès réalisés au cours de l'année précédente dans les domaines de la *chimie physique*, de la *chimie minérale*, de la *chimie organique*, *physiologie*, *pharmaceutique*, de la *grande industrie chimique*, de la *métallurgie*, de l'*industrie sucrière*, de l'*industrie des matières colorantes artificielles dérivées du goudron de houille*, de la *photographie*, des *parfums artificiels*, etc. Tous ces exposés sont confiés à des *spécialistes*.

Un compte rendu détaillé de tous les nouveaux ouvrages de chimie est publié dans le Bulletin bibliographique des **Actualités chimiques**. Cette nouvelle revue donne le Sommaire complet de tous les journaux de chimie qui se publient soit en France, soit à l'étranger. Cette innovation rendra de grands services aux chimistes de laboratoire, aux chimistes de recherches, car la simple lecture de ce *Sommaire* les renseignera sur les travaux publiés dans le monde entier.

TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE ANNÉE

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS
3, RUE RACINE, PARIS

BULLETIN DE SOUSCRIPTION

Je soussigné..

....

demeurant à ....

....

déclare souscrire à un abonnement de (1)..........................

à partir du ....

à (2) ....

(SIGNATURE.)

(1) Un an, six mois, trois mois.
(2) Ecrire le nom de la Revue à laquelle on s'abonne.

Envoi d'un numéro spécimen sur demande.

Revue Générale des Sciences :

Paris	Six mois,	**11** fr. ;	Un an,	**20** fr.
Départements	—	**12** —	—	**22** —
Etranger . . .	—	**13** —	—	**25** —

L'Éclairage Electrique :

France .	Un an,	**50** fr. :	Six mois,	**28** fr. ;	Trois mois,	**15** fr.
Etranger	—	**60** —	—	**32** —	—	**17** —

Les Actualités chimiques :

France.	Un an,	**15** fr.
Etranger.	—	**16** —

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY





